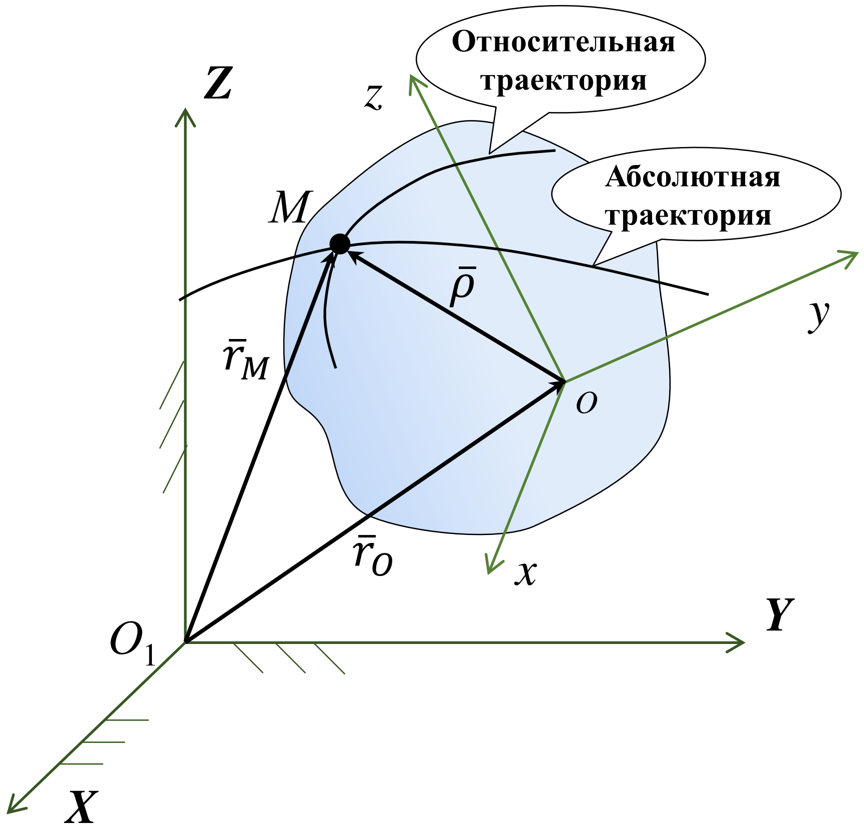
Сложное движение точки

Часто приходится рассматривать движение одной точки одновременно относительно нескольких систем координат, одна из которых условно принимается за неподвижную. Движение точки *M* называется ***сложным***, если точка по отношению к основной (неподвижной) системе отсчета участвует в двух или более движениях.



Абсолютным движением точки *M* называется движение, совершаемое ею по отношению к неподвижной системе отсчёта O_1XYZ. Абсолютной траекторией точки *M* является годограф радиуса-вектора $\bar{r}_M$.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки *M* называются скорость и ускорение точки *M* относительно неподвижной системы отсчёта.

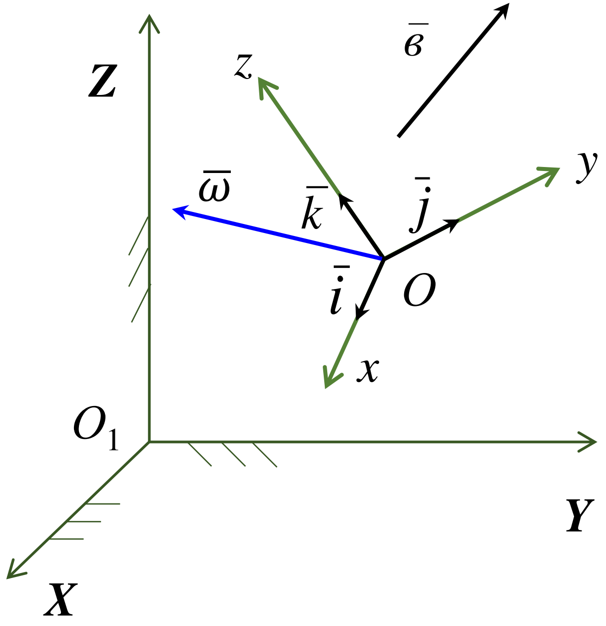
Относительным движением точки *M* называется движение, совершаемое ею по отношению к подвижной системе отсчёта *Oxyz*. Относительной траекторией точки *M* является годограф радиуса-вектора $\bar{\rho}$.

Относительной скоростью и относительным ускорением точки *M* (обозначаются $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$) называются скорость и ускорение точки *M* относительно подвижной системы отсчёта.

Переносным движением для точки *M* называется движение, подвижной системы *Oxyz* по отношению к неподвижной O_1XYZ.

Переносной скоростью и переносным ускорением точки *M* (обозначаются $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$) называются скорость и ускорение неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки, с которой в данный момент времени совпадает точка *M*.

Формула Бура



Рассмотрим изменение некоторого вектора $\bar в$ по отношению к двум системам координат.

В подвижной системе отсчета $Oxyz$: $\quad \bar в(t) = в_x \bar i + в_y \bar j + в_z \bar k$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{\bar в}(t) = \dot в_x \bar i + \dot в_y \bar j + \dot в_z \bar k + в_x \dot{\bar i} + в_y \dot{\bar j} + в_z \dot{\bar k}$$

Первые три слагаемые учитывают изменение вектора при неизменных ортах $\bar i, \bar j, \bar k$.

$$\dot в_x \bar i + \dot в_y \bar j + \dot в_z \bar k = \frac{\tilde d \bar в}{dt}$$ – локальная производная вектора $\bar b$.

$$\dot{\bar i} = \bar\omega \times \bar i, \quad \dot{\bar j} = \bar\omega \times \bar j, \quad \dot{\bar k} = \bar\omega \times \bar k$$ – формулы Пуассона.

$$\frac{d\bar в}{dt} = \frac{\tilde d \bar в}{dt} + в_x(\bar\omega \times \bar i) + в_y(\bar\omega \times \bar j) + в_z(\bar\omega \times \bar k) =$$

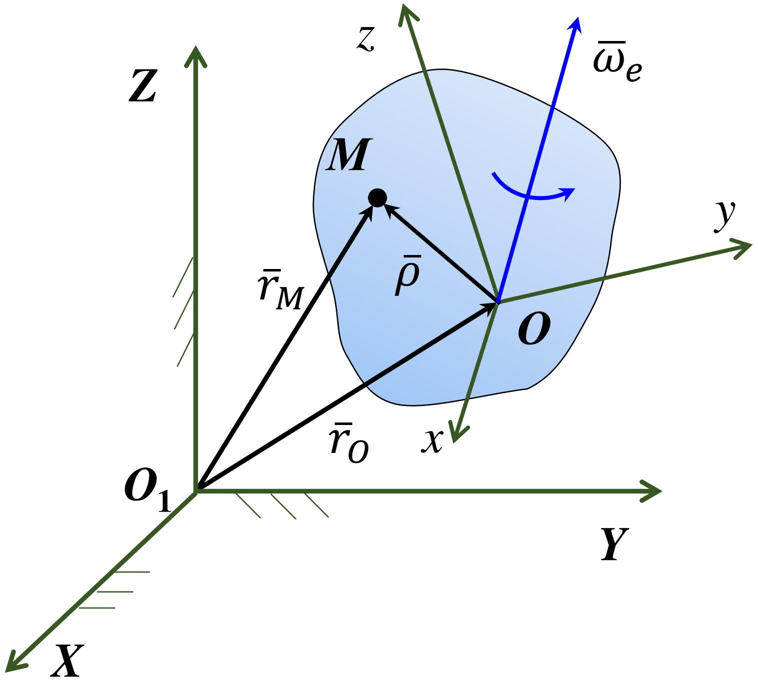
$$= \frac{\tilde d \bar в}{dt} + \bar\omega \times в_x \bar i + \bar\omega \times в_y \bar j + \bar\omega \times в_z \bar k = \frac{\tilde d \bar в}{dt} + \bar\omega \times (в_x \bar i + в_y \bar j + в_z \bar k) = \frac{\tilde d \bar в}{dt} + \bar\omega \times \bar в.$$

$$\boxed{\frac{d\bar в}{dt} = \frac{\tilde d \bar в}{dt} + \bar\omega \times \bar в}$$ – ***формула Бура.***

Полная (абсолютная) производная произвольного вектора, равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчёта на дифференцируемый вектор.

Теорема о сложении скоростей при сложном движении

Теорема. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.



Доказательство.

Для любого момента времени верно векторное равенство:

$$\bar r_M = \bar r_O + \bar\rho$$

Продифференцируем его по времени

$$\dot{\bar r}_M = \dot{\bar r}_O + \dot{\bar\rho}$$

По формуле Бура $\dfrac{d\bar\rho}{dt} = \dfrac{\tilde d\bar\rho}{dt} + \bar\omega_e \times \bar\rho;\quad \bar v_r = \dfrac{\tilde d\bar\rho}{dt};\quad \dot{\bar r}_M = \bar v_a;\ \dot{\bar r}_O = \bar v_O.$

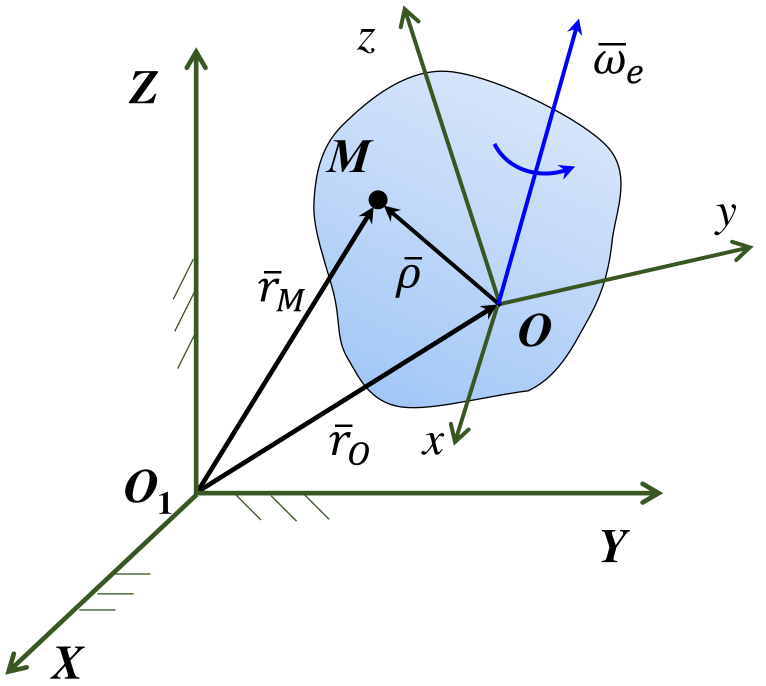
Тогда получаем $\bar v_a = \bar v_O + \bar v_r + \bar\omega_e \times \bar\rho.$

Поскольку $\bar v_e = \bar v_O + \bar\omega_e \times \bar\rho,$ то окончательно имеем:

$$\boxed{\bar v_a = \bar v_r + \bar v_e.}$$

Теорема о сложении ускорений при сложном движении

Кинематическая теорема Кориолиса. Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.



По теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость точки

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}.$$

Продифференцируем по времени абсолютную скорость точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}).$$

Воспользовавшись формулой Бура, получим

$$\bar{a} = \frac{\tilde{d}\,\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} =$$

$$= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\frac{\tilde{d}\,\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho}\right) =$$

$$= \bar{a}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) =$$

$$= \bar{a}_r + (\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho})) + 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Здесь $\bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}) = \bar{a}_e$ – переносное ускорение, $2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = \bar{a}_к$ – ускорение Кориолиса.

Окончательно $\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_к}$ – **кинематическая теорема Кориолиса.**

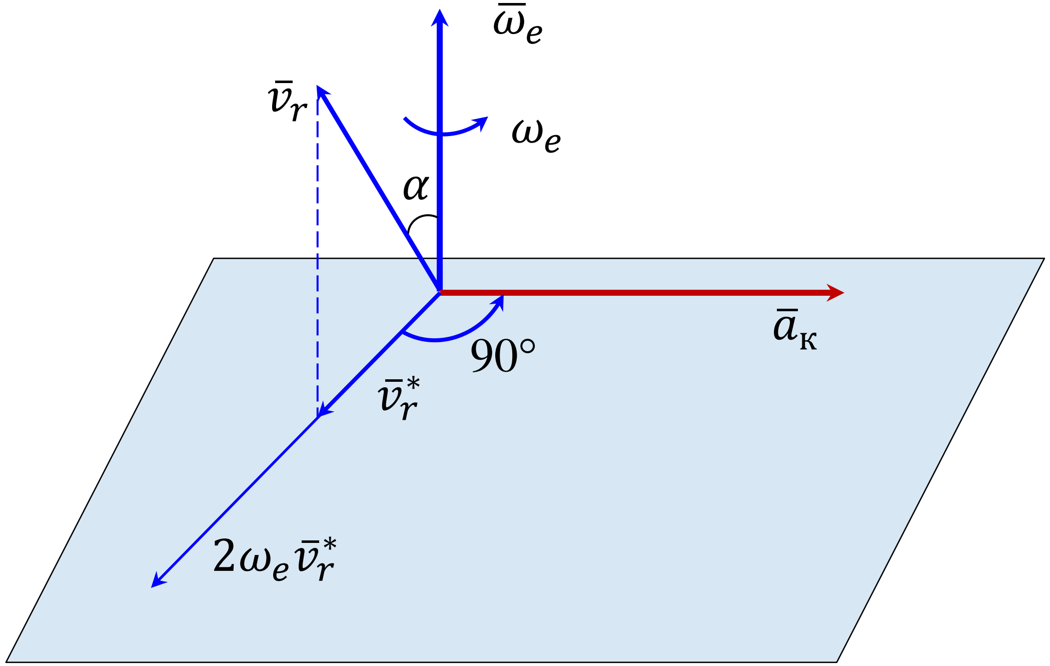
Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского

$$\bar{a}_{\text{к}} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

Вектор $\bar{a}_{\text{к}}$ перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$ и направлен таким образом, что, если смотреть с конца этого вектора, то кратчайший поворот вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору $\bar{v}_r$ наблюдается против поворота часовой стрелки.

По модулю ускорение Кориолиса $a_{\text{к}} = 2\omega_e v_r sin\alpha$, где $\alpha = \widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}$.

Правило Жуковского. Чтобы получить ускорение Кориолиса, надо спроецировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, полученную проекцию увеличить в $2\omega_e$ раз и повернуть ее на 90° в направлении переносного вращения.

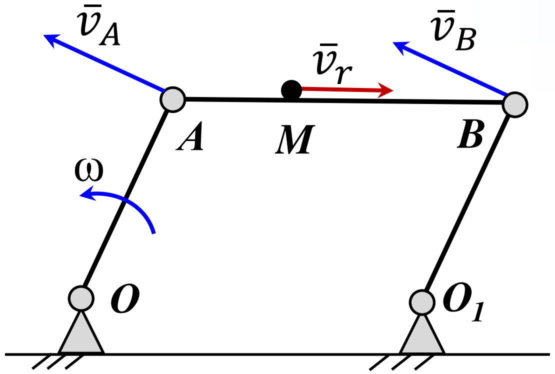


Нули ускорения Кориолиса.

Рассмотрим случаи, когда ускорение Кориолиса обращается в нуль.

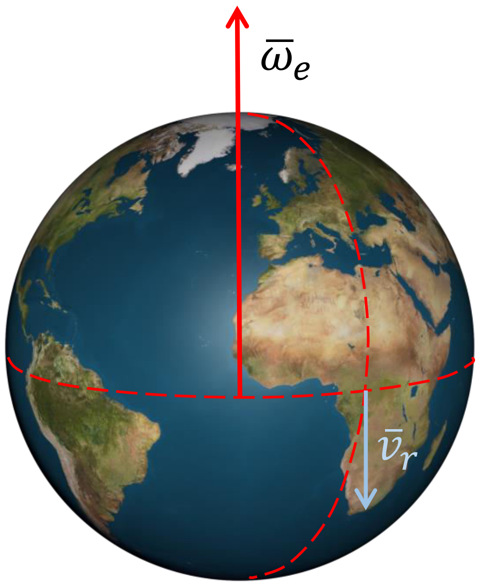
$$\bar{a}_к = 2\,\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

1. Переносное движение – поступательное, $\omega_e = 0$



2. $v_r = 0$, например, при смене направления относительного движения

3. $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$



Пример 1

Земной шар радиуса R вращается равномерно с угловой скоростью ω. Вдоль меридиана движется автомобиль с постоянной скоростью u относительно Земли. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение автомобиля, приняв его за материальную точку. Автомобиль находится на широте α.

Решение.

Свяжем подвижную систему координат с Землей.

Тогда переносное движение – вращательное с угловой скоростью $\omega_e = \omega$.

Относительная траектория – окружность радиуса R.

По теореме о сложении скоростей:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_r + \bar{v}_e$$

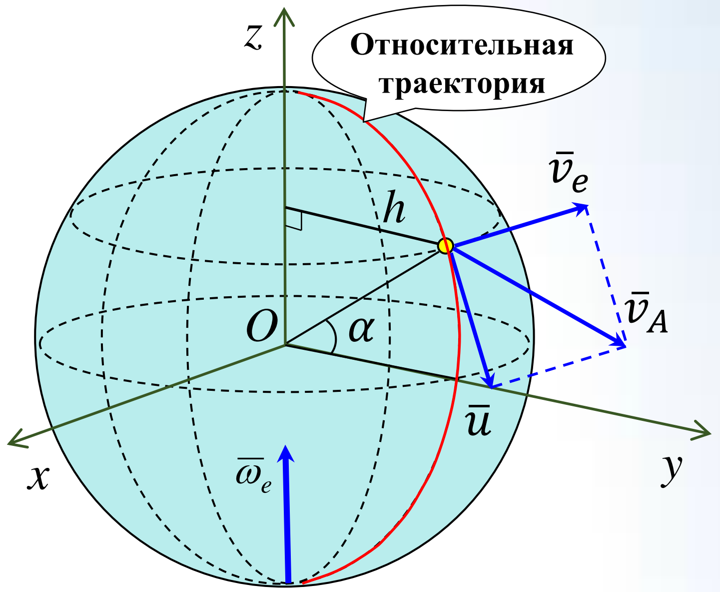
Относительная скорость $\bar{v}_r = \bar{u}$

Переносная скорость направлена по касательной к параллели и равна:

$$v_e = \omega h = \omega R \cos\alpha$$

Поскольку переносная и относительная скорости ортогональны, то:

$$v_A = \sqrt{(v_r)^2 + (v_e)^2} = \sqrt{u^2 + (\omega R\cos\alpha)^2}$$



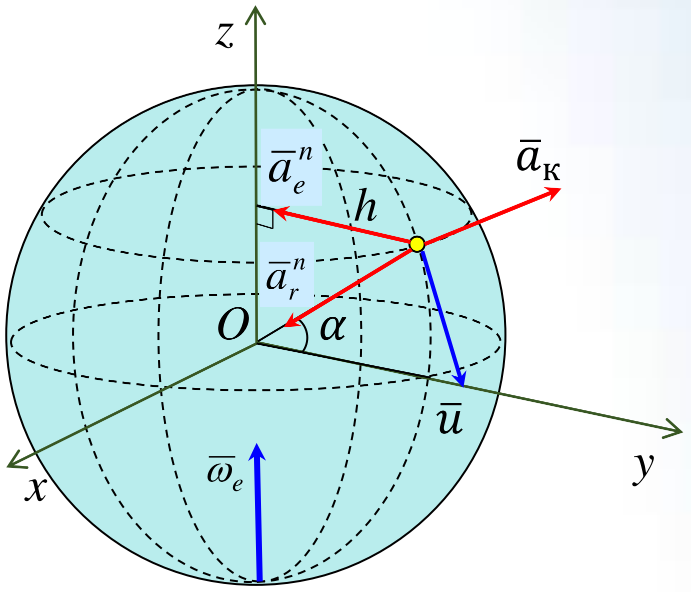
Пример 1

По теореме о сложении ускорений: $\bar a = \bar a_r + \bar a_e + \bar a_к$

Относительная траектория окружность, поэтому:

$\bar a_r = \bar a_r^n + \bar a_r^\tau$, относительная скорость постоянная $\Rightarrow$ $a_r^\tau = \dot u = 0$,

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{u^2}{R}.$$



Переносное движение вращательное, поэтому:

$\bar a_e = \bar a_e^n + \bar a_e^\tau$, переносная угловая скорость постоянная $\Rightarrow$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e h = \dot\omega_e R\cos\alpha = 0,$$

$$a_e^n = \omega_e^2 h = \omega_e^2 R\cos\alpha.$$

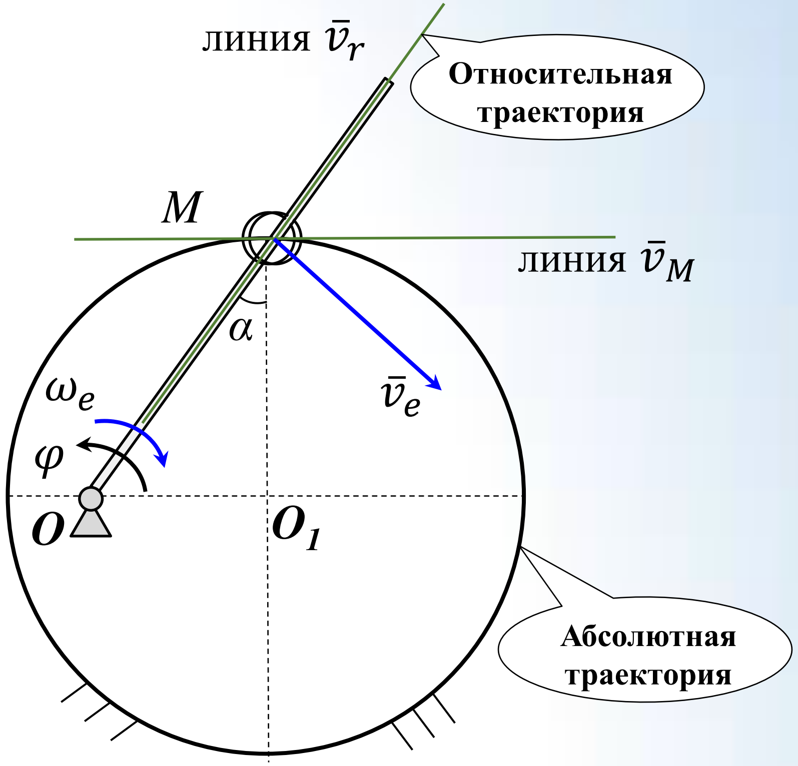
$$\bar a_к = 2\bar\omega_e \times \bar v_r, \quad a_к = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\bar\omega_e, \bar v_r}) = 2\omega_e u \sin\alpha.$$

$$\begin{cases} a_x = -a_к \\ a_y = -a_r^n\cos\alpha - a_e^n \\ a_z = -a_r^n \sin\alpha \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(2\omega_e u\sin\alpha)^2 + \left(\frac{u^2\cos\alpha}{R} + \omega_e^2 R\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{u^2\sin\alpha}{R}\right)^2}.$$

Пример 2

На неподвижный проволочный обруч радиуса *R=2см* надето кольцо *M*, через которое проходит стержень. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости рисунка по закону $\varphi(t) = 7t - 5t^2 + t^3$ рад , $OO_1 = 3$ см. Для момента времени *t=2c* и положения механизма, показанного на рисунке, определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение кольца *M*.



Решение.

Свяжем неподвижную систему отсчета с обручем, а подвижную – со стержнем.

Тогда абсолютная траектория точки М – окружность.

Переносное движение - вращение относительно оси, проходящей через точку *O*.

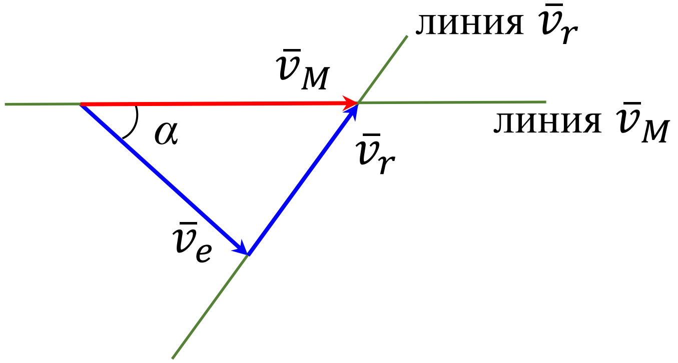
Относительная траектория – прямая.

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 7 - 10t + 3t^2 = -1 \text{ рад/с}, \quad \omega_e = |\dot{\varphi}| = 1 \text{ рад/с}$$

По теореме о сложении скоростей $\quad \underline{\bar{v}_M} = \underline{\underline{\bar{v}_e}} + \underline{\bar{v}_r}$

$$v_e = \omega_e OM = 1 \cdot 5 = 5 \text{ см/с}$$

Построим план скоростей.



$$v_r = v_e tg\alpha = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3{,}75 \text{ см/с}, \quad v_M = \frac{v_e}{cos\alpha} = 5 \cdot \frac{5}{4} = 6{,}25 \text{ см/с}$$

Пример 2

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = -10 + 6t = 2 \text{ рад/с}^2$$

По теореме о сложении ускорений $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_к$

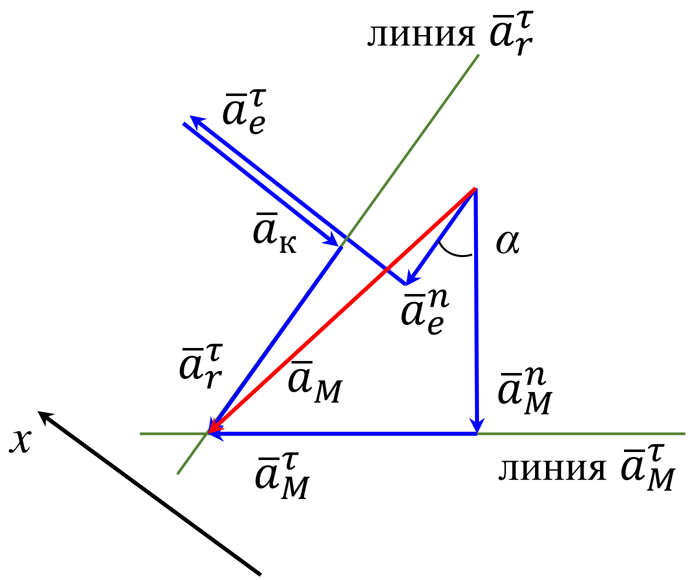
$$\underline{\underline{\bar{a}_M^n}} + \underline{\bar{a}_M^\tau} = \underline{\underline{\bar{a}_e^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_e^\tau}} + \underline{\bar{a}_r^\tau} + \underline{\underline{\bar{a}_к}}$$

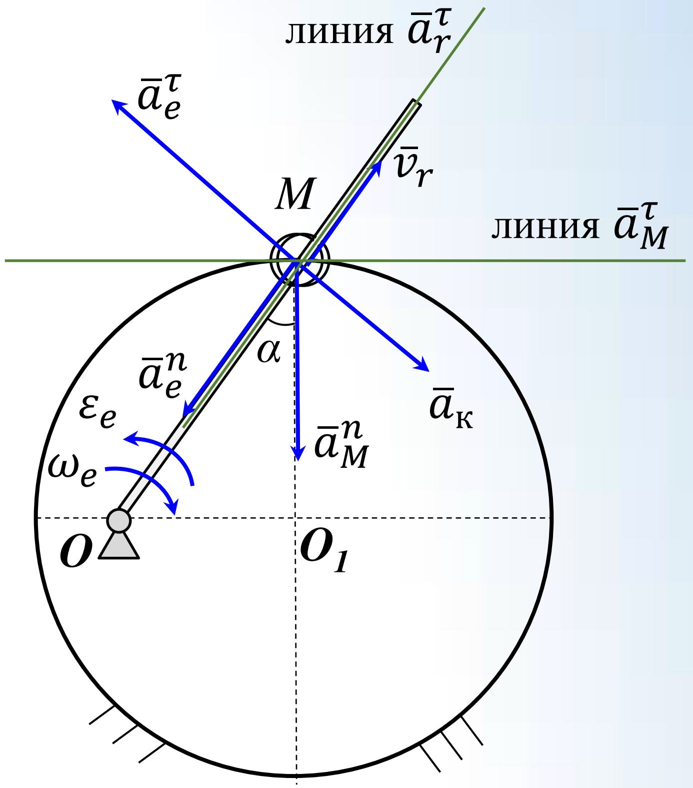
$$a_M^n = \frac{v_M^2}{R} = \frac{6{,}25^2}{4} = 9{,}76 \text{ см/с}^2$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 1 \cdot 5 = 5 \text{ см/с}^2$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см/с}^2$$

$$a_к = 2\omega_e v_r = 2 \cdot 1 \cdot 3{,}75 = 7{,}8 \text{ см/с}^2$$





Относительное ускорение направлено вдоль стержня.

Абсолютное касательное ускорение направлено по касательной к абсолютной траектории.

Построим план ускорений.

Спроецируем план ускорений на ось $x \perp \bar{a}_r^\tau$: $-a_M^n cos\alpha + a_M^\tau sin\alpha = a_e^\tau - a_к$

Отсюда $a_M^\tau = \dfrac{1}{sin\alpha}(a_e^\tau - a_к + a_M^n cos\alpha) \approx 10{,}45 \text{ см/с}^2$ $a_M = \sqrt{a_M^{n\,2} + a_M^{\tau\,2}} \approx 14{,}29 \text{ см/с}^2$

,