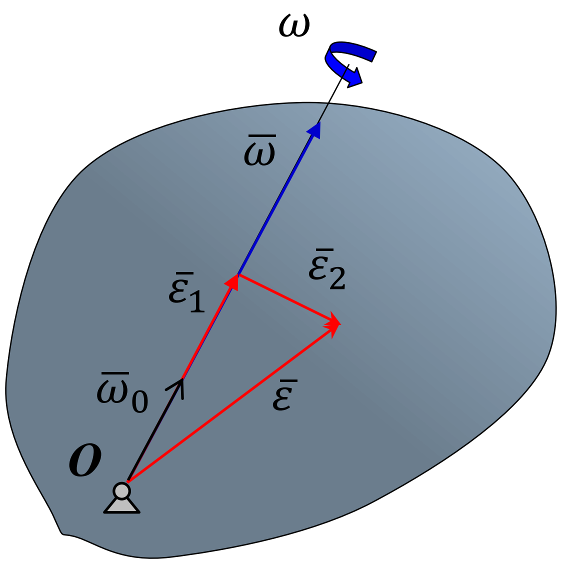
Угловое ускорение твердого тела при сферическом движении.

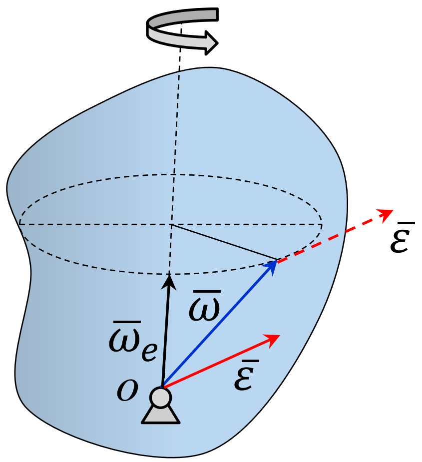


Представим вектор угловой скорости в виде $\bar{\omega} = \omega\bar{\omega}_0$

Тогда $\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega\bar{\omega}_0) = \dfrac{d\omega}{dt}\bar{\omega}_0 + \omega\dfrac{d\bar{\omega}_0}{dt} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$

$\bar{\varepsilon}_1 = \dfrac{d\omega}{dt}\bar{\omega}_0$ составляющая $\bar{\varepsilon}$, направленная вдоль мгновенной оси вращения и характеризует изменение $\bar{\omega}$ по величине;

$\bar{\varepsilon}_2 = \omega\dfrac{d\bar{\omega}_0}{dt}$ составляющая $\bar{\varepsilon}$, перпендикулярная вектору $\bar{\omega}_0$ и характеризующая изменение $\bar{\omega}$ по направлению.

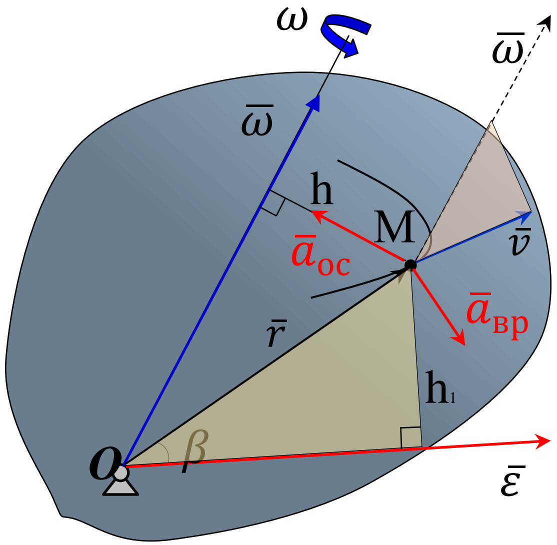


Если угловая скорость постоянна по модулю, то: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}$

где $\bar{\omega}_e$ – угловая скорость вращения дифференцируемого по времени вектора $\bar{\omega}$, т.е. угловая скорость вращения мгновенной оси, по которой направлен вектор $\bar{\omega}$.

Условимся вектор мгновенного углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ откладывать от неподвижной точки О тела.

Ускорения точек твердого тела при сферическом движении.



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v};$$

$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$ – **формула Ривальса.**

$\bar{a}_{вр} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ – **вращательное ускорение**

Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{r}$ и $\bar{\varepsilon}$, модуль его равен:

$$a_{вр} = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r sin\beta = \varepsilon h_1,$$

где h_1 – кратчайшее расстояние от точки М до линии вдоль которой направлен вектор $\bar{\varepsilon}$ в данный момент времени.

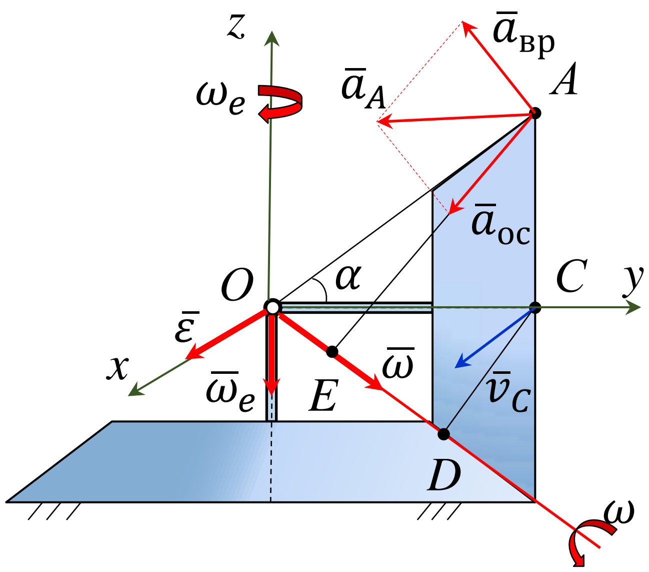
$\bar{a}_{ос} = \bar{\omega} \times \bar{v}$ - **осестремительное ускорение**

Вектор осестремительного ускорения перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{v}$, и направлен от точки М вдоль перпендикуляра опущенного из нее на мгновенную ось вращения. Модуль его равен:

$a_{ос} = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega v sin\,\pi/2 = \omega^2 h,$ где h – кратчайшее расстояние от точки М до мгновенной оси вращения.

Модуль ускорения $\bar{a}$ равен $a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2 + 2a_{вр}a_{ос}cos(\widehat{\bar{a}_{вр}\bar{a}_{ос}})}$.

Пример.



Пример. Найти угловое ускорение конического катка (бегуна), а также ускорение его точки A, если скорость центра основания катка C, движущегося по окружности радиуса OC = R постоянна и равна v. Каток катится без скольжения по неподвижной конической поверхности. Радиус основания катка AC = r.

Решение.

Как было показано на предыдущей лекции, мгновенная ось направлена по линии касания бегуна с конической поверхностью и угловая скорость:

$$\omega = \frac{v_C}{CD} = \frac{v}{r cos\alpha} = const,$$

Т.к. $\omega = const$, то $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}$, где $\omega_e = \frac{v_C}{CO} = \frac{v}{R}$.

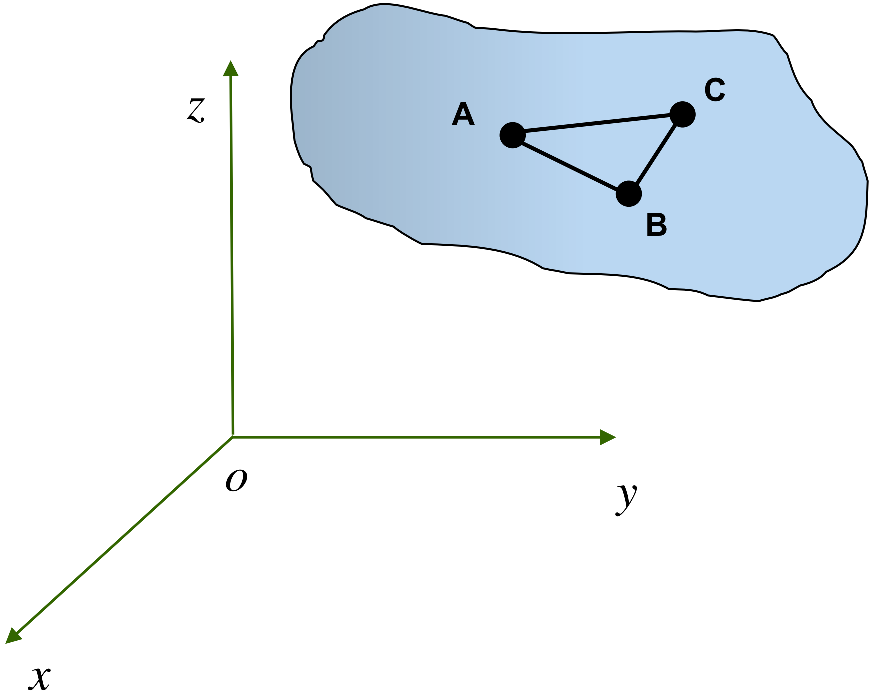
$$\varepsilon = \omega_e \omega \sin(\pi/2 - \alpha) = \omega_e \omega cos\alpha = \frac{v}{R}\frac{v}{r cos\alpha} cos\alpha = \frac{v^2}{Rr}$$

$$a_A^{вр} = \varepsilon OA = \frac{v^2}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2}; \qquad a_A^{ос} = \omega^2 AE = \frac{v^2}{r^2 cos^2\alpha} 2r cos\alpha = \frac{2v^2}{r cos\alpha} = \frac{2v^2}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2}$$

$$a_A = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2 - 2a_{вр}a_{ос} cos2\alpha} = \frac{v^2}{Rr}\sqrt{R^2 + 9r^2}$$

Общий случай движения твердого тела.

Движение твердого тела называется **общим случаем движения**, если нет ограничений на положение тела в пространстве. Все остальные типы движения твердого тела можно рассматривать как его частные проявления.



Положение твердого тела в пространстве определяется положением трех его точек не лежащих на одной прямой.

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_c, y_c, z_c)$$

Координаты этих точек не являются независимыми, они связаны уравнениями:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = L_{AB}^2$$
$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = L_{AC}^2$$
$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = L_{BC}^2$$

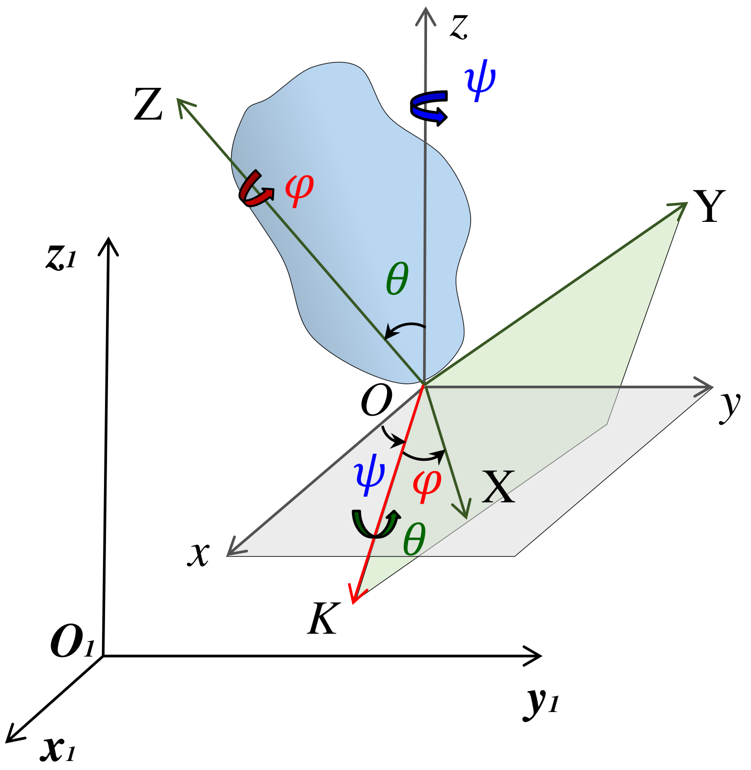
L_{AB}, L_{AC}, L_{BC} - расстояния между соответствующими точками в теле.

Таким образом, число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве, а следовательно и **число степеней свободы свободного твердого тела в пространстве равно шести**.

Общий случай движения твердого тела.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Теорема Шаля. В общем случае движения твердое тело из одного положения в другое можно переместить путем одного поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом, и одного поворота вокруг оси, проходящей через выбранный полюс.



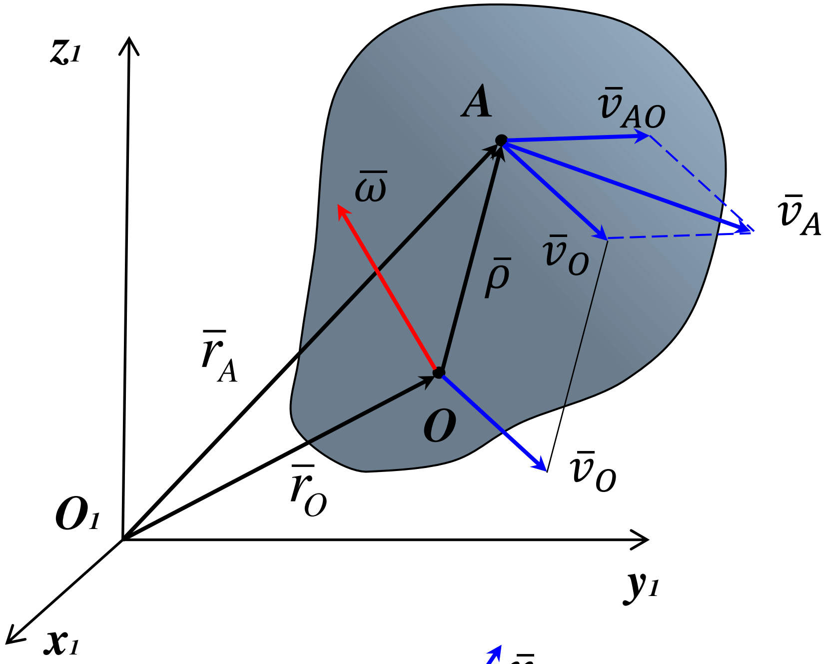
Любое движение свободного тела можно составить из поступательного движения вместе с подвижной системой координат и сферического движения относительно этой системы координат.

$O_1x_1y_1z_1$ – неподвижная система; $Oxyz$ – движется поступательно

Уравнения движения твердого тела в общем случае его движения:

$$x_O = x_O(t) \qquad \psi = \psi(t)$$
$$y_O = y_O(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$
$$z_O = z_O(t) \qquad \theta = \theta(t)$$

Скорости точек твердого тела в общем случае движения.



$$\bar{r}_A = \bar{r}_o + \bar{\rho}, \qquad |\bar{\rho}| = OA = const$$

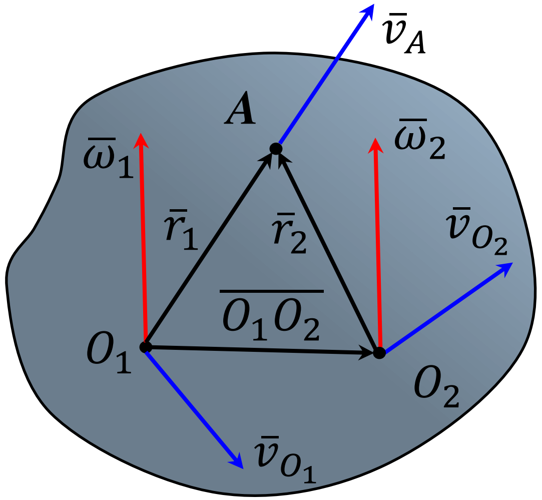
$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_o + \bar{\rho}) = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$$

По формуле Эйлера: $\bar{v}_{AO} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}.$

Окончательно: $\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}.$

Докажем, что **угловая скорость не зависит от выбора полюса.**

Предположим, что угловые скорости относительно двух полюсов не равны.



$$\bar{v}_A = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1; \quad \bar{v}_A = \bar{v}_{O_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2$$

$$\bar{v}_{O_2} = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}$$

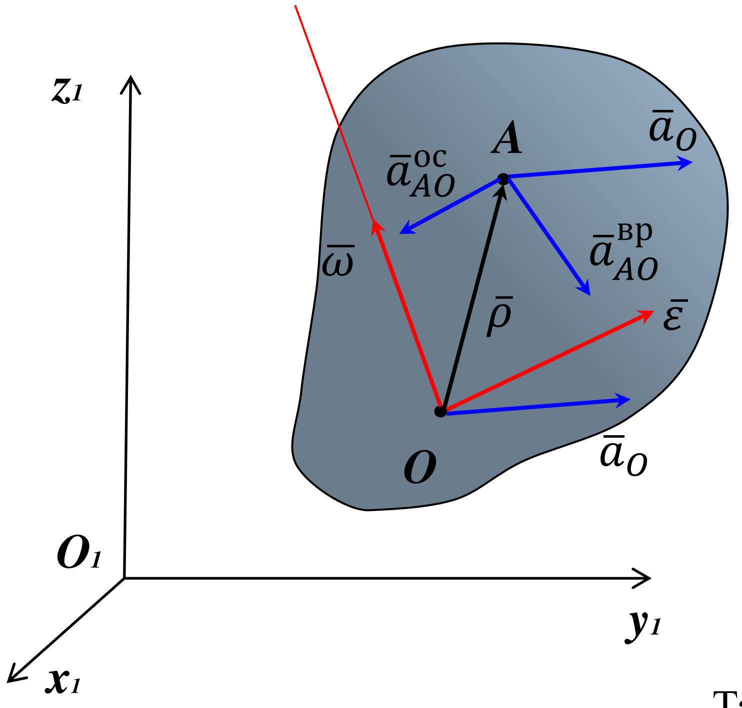
$$\bar{v}_A = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2$$

$$\bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2$$

$$\bar{\omega}_1 \times (\bar{r}_1 - \overline{O_1O_2}) = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2, \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}_2 + \overline{O_1O_2}$$

$$\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_2 = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2 \quad \Rightarrow \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$$

Ускорения точек твердого тела в общем случае движения.



$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}$$

$$\bar{a}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{\rho})}{dt} =$$

$$= \bar{a}_O + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^{\text{вр}} + \bar{a}_{AO}^{\text{ос}}$$

$\bar{a}_{AO}^{\text{вр}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}$ – вращательное ускорение точки A в сферическом движении вокруг полюса O.

$\bar{a}_{AO}^{\text{ос}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{\omega} \times \bar{v}_{AO}$ – осестремительное ускорение точки A в сферическом движении вокруг полюса O.

Таким образом, ускорение любой точки тела равна геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее сферическом движении вокруг полюса.

Так же как и вектор $\bar{\omega}$, вектор углового ускорения свободного твердого тела не зависит от выбора полюса.

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2, \qquad \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} = \frac{d\bar{\omega}_2}{dt}$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}$$