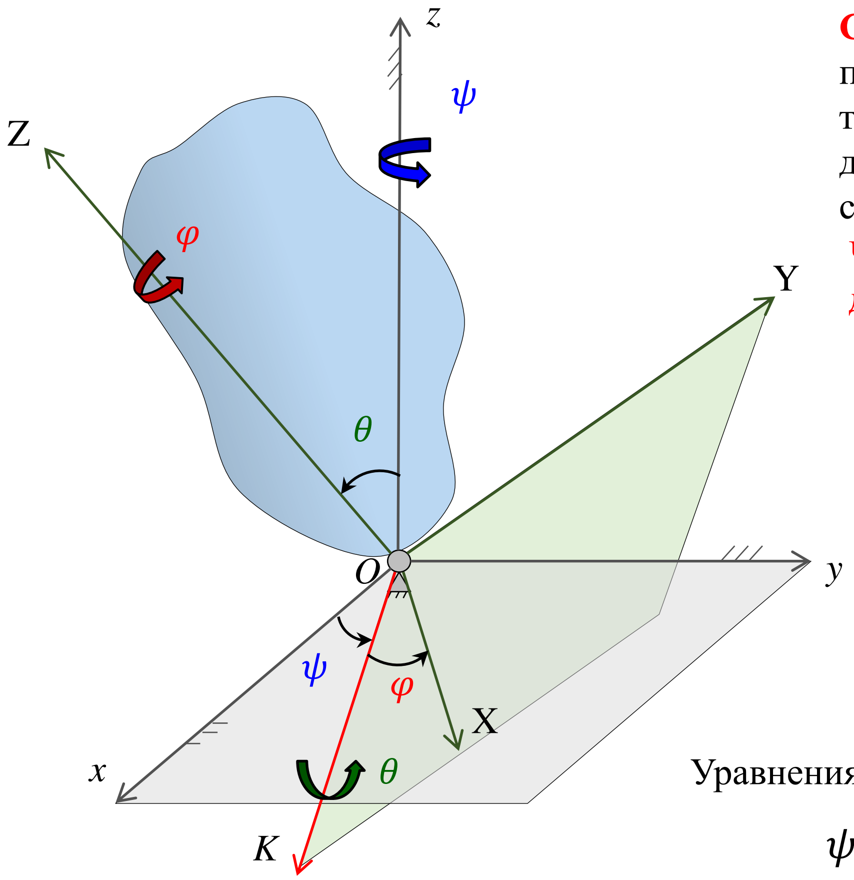
Сферическое движение твердого тела. Углы Эйлера.



Сферическим называется такое движение твердого тела, при котором во все время движения одна и та же точка твердого тела остается неподвижной. Остальные точки движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой.

Число степеней свободы твердого тела при сферическом движении равно трем.

Углы Эйлера

Oxyz – неподвижная система координат.

OXYZ – подвижная система координат, жестко связанная с телом.

OK – линия узлов, линия пересечения плоскостей Oxy и OXY.

ψ – угол прецессии

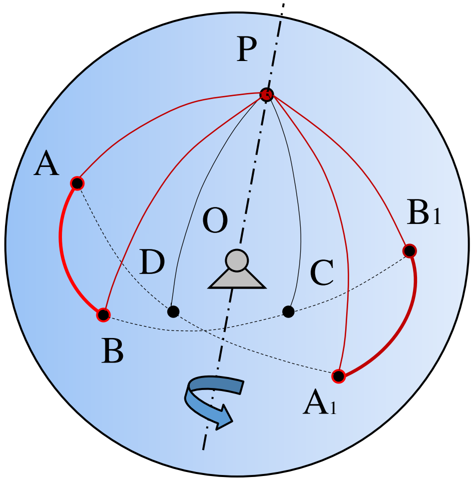
φ – угол собственного вращения

θ – угол нутации

Уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки

$$\psi = \psi(t); \varphi = \varphi(t); \ \theta = \theta(t)$$

Теорема Эйлера-Даламбера.



Теорема Эйлера-Даламбера. Самое общее конечное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку O, есть вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку.

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1}$ (расстояния между точками твердого тела)

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DA_1}$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CB_1}$

В точках D и C проведем сферические перпендикуляры к дугам $\overset{\frown}{AA_1}$ и $\overset{\frown}{BB_1}$ которые пересекутся в точке P.

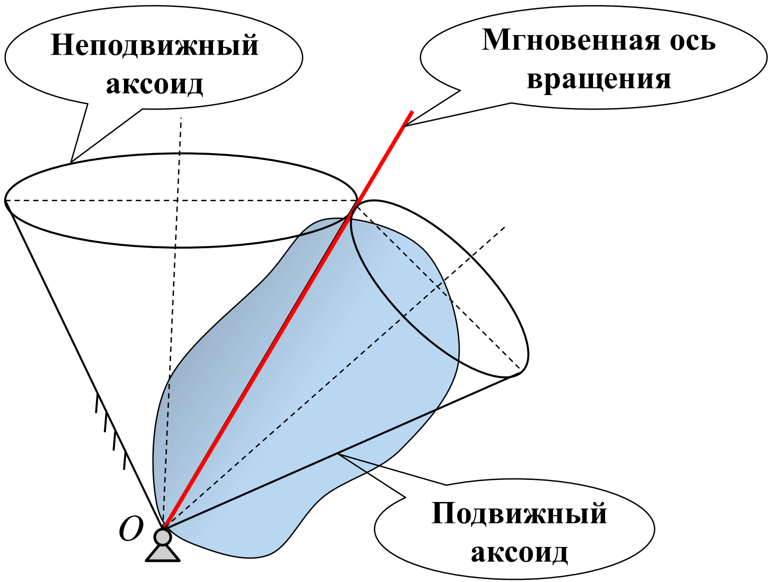
$\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{A_1P}$, $\overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{B_1P}$ как дуги имеющие равные проекции.

Сферические треугольники APB и A_1PB_1 равны по трем сторонам, и могут быть совмещены поворотом вокруг оси проведенной через неподвижную точку O и точку P. Ось OP называется **осью конечного вращения.**

Мгновенная ось вращения. Аксоиды.

Ось, вокруг которой следует вращать тело для перевода его из одного положения в другое, бесконечно близкое первому, называют **мгновенной осью вращения**.

Любое движение вокруг неподвижной точки можно заменить последовательностью вращений вокруг совокупности мгновенных осей.

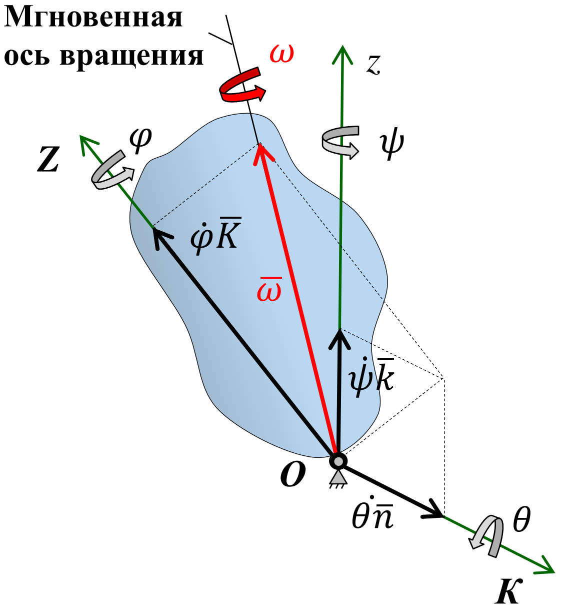


Геометрическое место мгновенных осей относительно неподвижных осей называется **неподвижным аксоидом.** Неподвижный аксоид является конической поверхностью с вершиной в неподвижной точке тела.

Геометрическое место мгновенных осей вращения в движущемся теле называется **подвижным аксоидом.** Как и неподвижный, подвижный аксоид представляет собой коническую поверхность с вершиной в неподвижной точке.

При вращении твердого тела, связанный с ним подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду и их общая образующая в каждый момент времени является мгновенной осью вращения тела.

Угловая скорость твердого тела при сферическом движении.



Мгновенная угловая скорость твердого тела в сферическом движении – вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения так, что с конца его поворот тела виден против часовой стрелки, модуль которого равен:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\alpha|}{\Delta t}$$

$\dot{\psi}\overline{k}$ – вектор угловой скорости прецессии

$\dot{\varphi}\overline{K}$ – вектор угловой скорости собственного вращения

$\dot{\theta}\overline{n}$ – вектор угловой скорости нутации

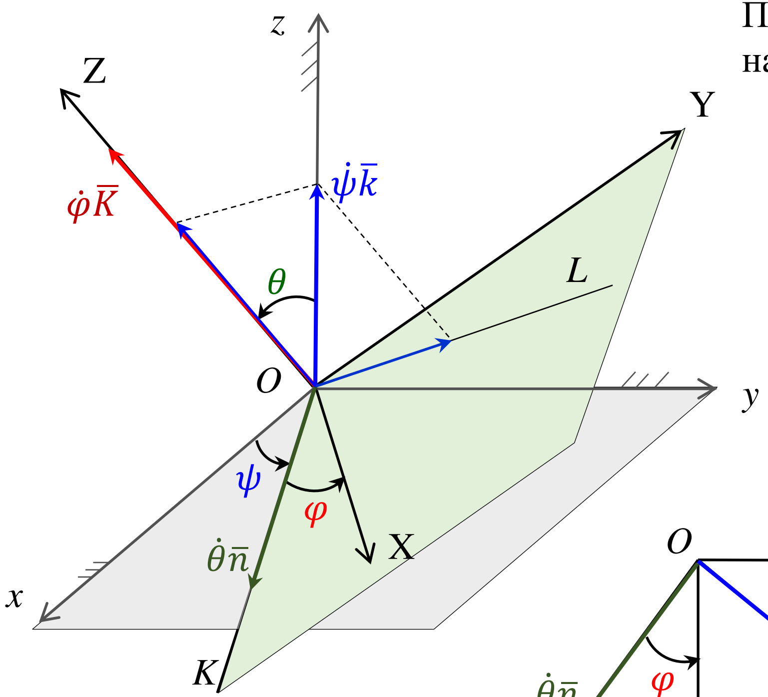
где $\overline{k}, \overline{n}, \overline{K}$ – единичные векторы осей Oz, OK и OZ соответственно.

Мгновенная угловая скорость $\overline{\omega}$ равна векторной сумме угловых скоростей составляющих движений:

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{K} + \dot{\theta}\overline{n} + \dot{\psi}\overline{k}$$

Ось, совпадающая с вектором $\overline{\omega}$, является мгновенной осью вращения твердого тела вокруг неподвижной точки О.

Кинематические уравнения Эйлера.



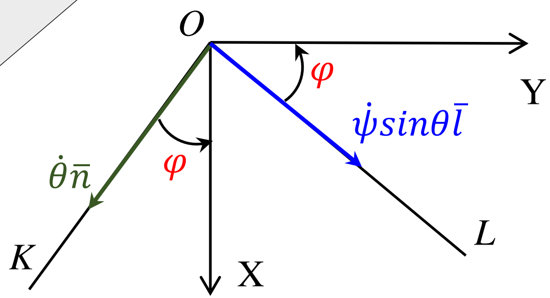
Получим проекции вектора $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{K} + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\psi}\bar{k}$ на оси подвижной системы координат OXYZ.

Предварительно разложим вектор угловой скорости прецессии на две взаимно перпендикулярные составляющие вдоль оси OZ и вспомогательной оси OL, перпендикулярной линии узлов OK. Тогда:

$$\omega_X = \dot{\psi} sin\theta sin\varphi + \dot{\theta} cos\varphi;$$

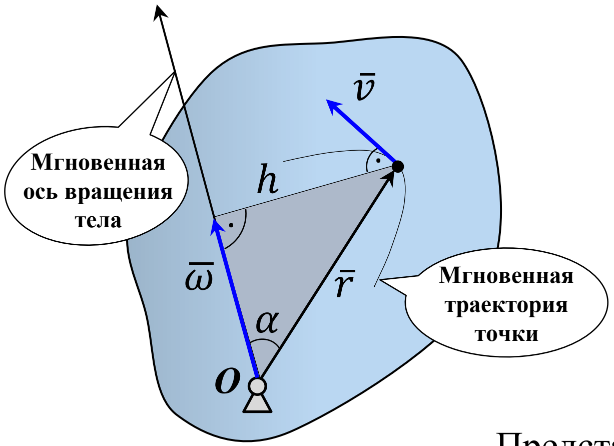
$$\omega_Y = \dot{\psi} sin\theta cos\varphi - \dot{\theta} sin\varphi;$$

$$\omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} cos\theta.$$



Эти соотношения носят название **кинематических уравнений Эйлера.**

Скорости точек твердого тела при сферическом движении



Линейные скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной точки можно вычислить по формуле Эйлера, как и в случае вращения вокруг неподвижной оси, только радиус-вектор каждой точки удобно проводить из неподвижной точки:

$$\bar{v} = \overline{\omega} \times \bar{r}$$

Модуль скорости $v = \omega r sin\alpha = \omega h$, где h кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до мгновенной оси вращения.

Таким образом, **скорости точек тела при сферическом движении пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенной оси.**

Представим правую часть формулы Эйлера в виде определителя:

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$, где $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ – орты подвижной системы координат OXYZ.

Раскрывая этот определитель по элементам первой строки, найдем проекции скорости точки тела на оси подвижной системы координат:

$$v_X = \omega_Y Z - \omega_Z Y; \; v_Y = \omega_Z X - \omega_X Z; \; v_Z = \omega_X Y - \omega_Y X.$$

Уравнение мгновенной оси вращения. Формулы Пуассона.

Для точек, расположенных на мгновенной оси, скорости равны нулю, тогда:

$$\omega_Y Z - \omega_Z Y = 0;\quad \omega_Z X - \omega_X Z = 0;\quad \omega_X Y - \omega_Y X = 0.$$

Эти уравнения можно переписать в виде: $$\frac{X}{\omega_X} = \frac{Y}{\omega_Y} = \frac{Z}{\omega_Z}.$$

Данные соотношения являются уравнениями мгновенных осей вращения тела в подвижной системе координат. Если величины, входящие в данные уравнения, рассматривать как функции времени, то эти соотношения будут уравнениями подвижного аксоида.

Поскольку длина радиуса-вектора $\bar{r}$ как расстояние между двумя точками в твердом теле является постоянной величиной, то формулу Эйлера:

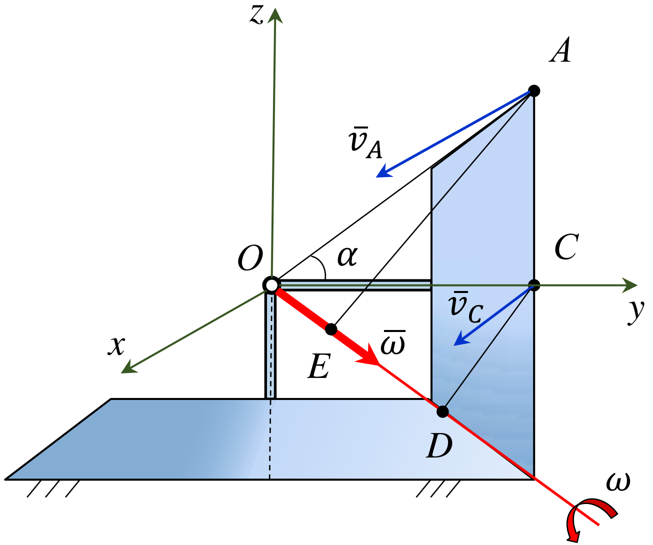
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

можно рассматривать, как формулу для вычисления производной по времени от вектора постоянного по модулю, изменение которого связано только с поворотом вокруг неподвижной точки.

Если в качестве таких векторов взять орты подвижной системы координат $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$, вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то получим **формулы Пуассона**:

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{I};\quad \frac{d\bar{J}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{J};\quad \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{K}.$$

Пример



Пример. Найти угловую скорость конического катка (бегуна), и скорость его точки А, если скорость центра основания катка С, движущегося по окружности радиуса ОС = R постоянна и равна v. Каток катится без скольжения по неподвижной конической поверхности. Радиус основания катка АС = r.

Решение.

Поскольку каток катится без проскальзывания, то мгновенная ось вращения расположена вдоль линии его касания с неподвижной поверхностью.

Расстояние до мгновенной оси вращения: $CD = r\cos\alpha$

$v_c = \omega CD.$

Тогда $\omega = \frac{v_C}{CD} = \frac{v}{r\cos\alpha} = const.$

Направление угловой скорости определяем по направлению скорости v_C.

$$v_A = \omega AE = \frac{v}{r\cos\alpha} 2r\cos\alpha = 2v_C$$