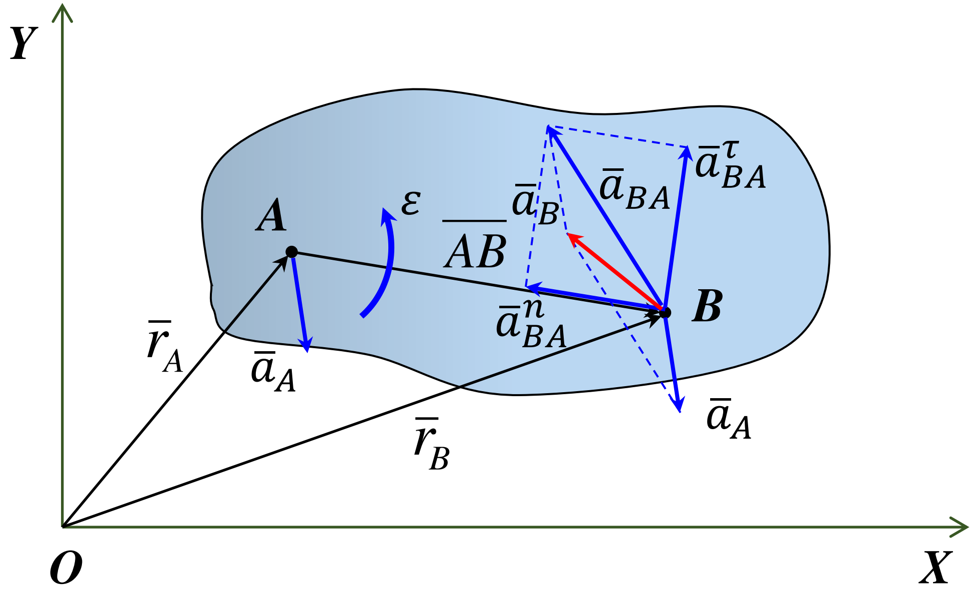
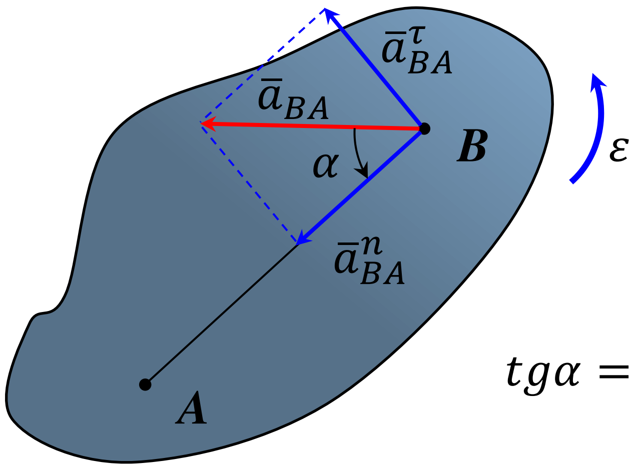
Ускорения точек твердого тела при плоском движении.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Теорема. Ускорение любой точки фигуры при ее плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса фигуры и ускорения этой точки при вращении плоской фигуры вокруг полюса: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$.





$$tg\alpha = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

По теореме о сложении скоростей при плоском движении:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}.$$

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}) = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt};$$

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A; \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}; \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = \bar{\omega} \times \overline{AB};$$

$$\bar{a}_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}.$$

По модулю $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB$.

Вектор $\bar{a}_{BA}^{\tau} \perp \overline{AB}$ и направлен в соответствии с дуговой стрелкой ε.

По модулю $a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB$.

Вектор $\bar{a}_{BA}^{n}$ направлен от точки B к полюсу A .

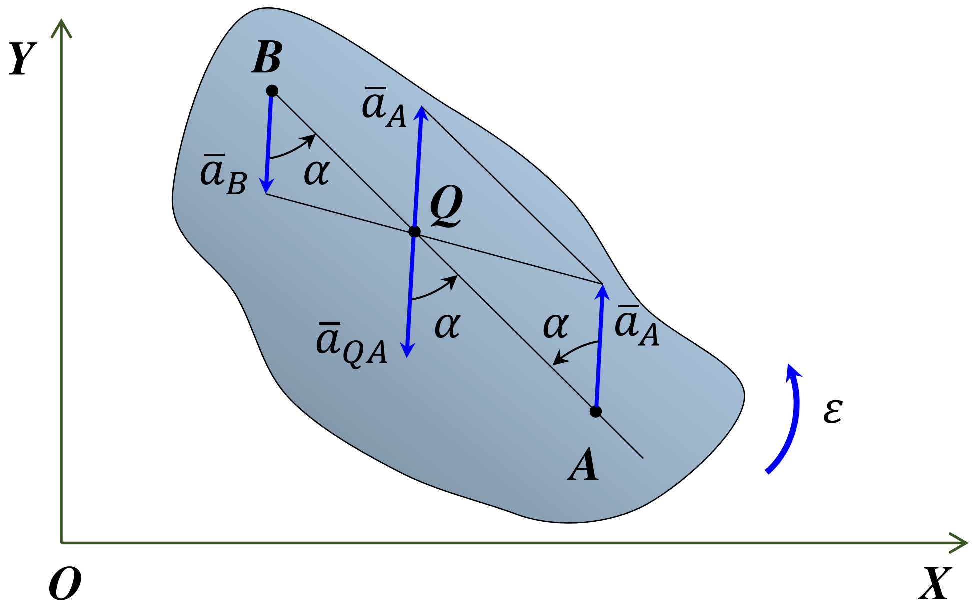
$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^{\tau})^2 + (a_{BA}^{n})^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Мгновенный центр ускорений.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Теорема. При движении плоской фигуры в своей плоскости, если одновременно не равны нулю угловая скорость и угловое ускорение, существует единственная точка этой фигуры, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений (МЦУ).** Будем обозначать МЦУ буквой Q .



$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA} = 0$$

$$\bar{a}_A = -\bar{a}_{QA}$$

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

$$a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Для ускорения произвольной точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ} = \bar{a}_{BQ}\ ;\ a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

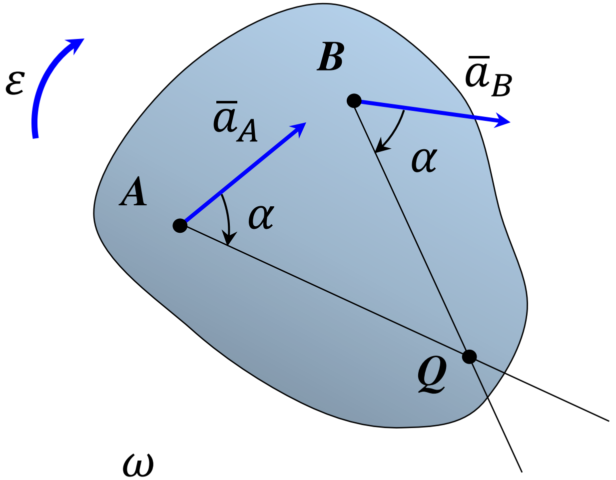
В данный момент времени ускорения точек фигуры при плоском движении вычисляются так же, как при вращательном движении плоской фигуры вокруг мгновенного центра ускорений с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε.

Способы определения МЦУ.

1. Известны $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$

$$\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

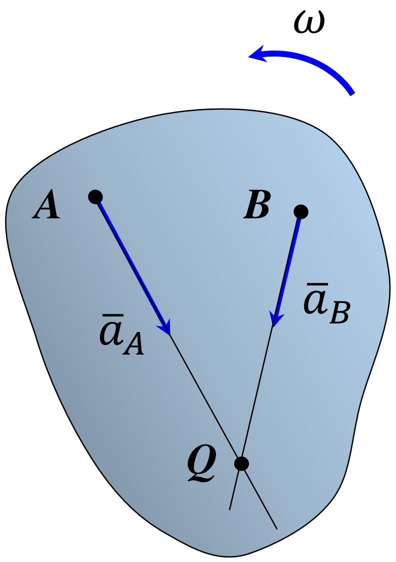
$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$



2. Известны $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \omega \neq 0, \varepsilon = 0$

$$\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0$$

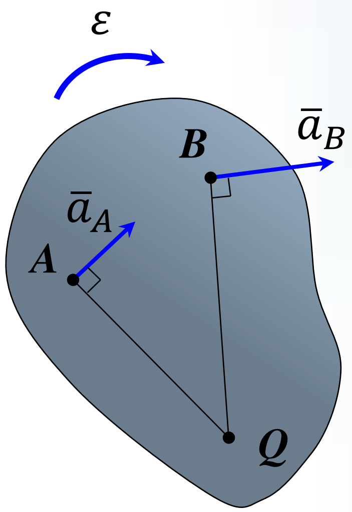
$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \omega^2$$



3. Известны $\overline{a}_A, \overline{a}_B, \omega = 0, \varepsilon \neq 0$

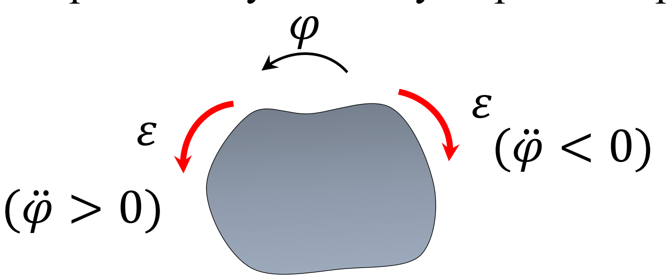
$$\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \varepsilon$$



Способы вычисления углового ускорения при плоском движении.

1. Если известно уравнение движения $\varphi = \varphi(t)$, то по определению:
   $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$. Направление углового ускорения определяется знаком второй производной.

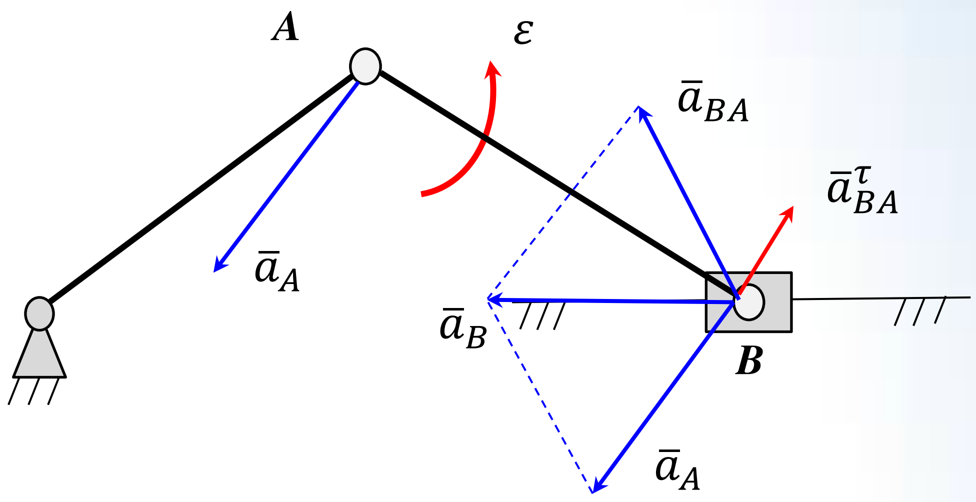


2. По теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}, \quad a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB.$$

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB}$$

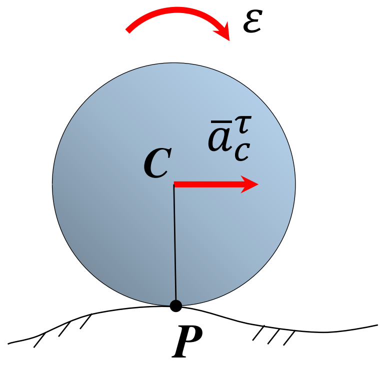
Направление углового ускорения определяется по направлению ускорения $\bar{a}_{BA}^{\tau}$.



3. Если известно положение МЦС, то $\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}$

Дифференцируя по времени: $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{AP}\dfrac{dv_A}{dt} + v_A \cancel{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{AP}\right)}.$

Если $AP=const$, то: $\varepsilon = \dfrac{a_A^{\tau}}{AP}$



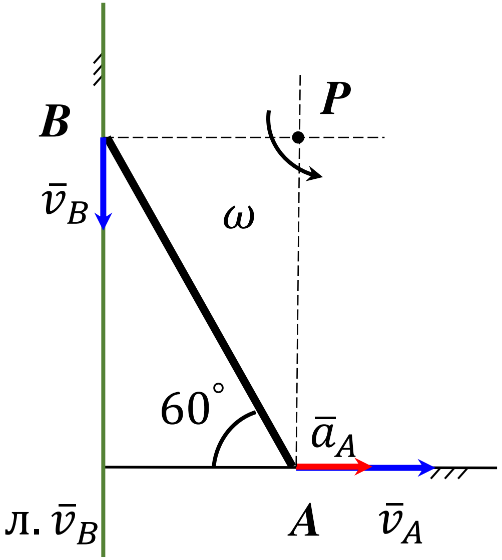
$CP=R=const$

$$\varepsilon = \frac{a_c^{\tau}}{CP}$$

Пример 1.

Стержень AB скользит своими концами вдоль взаимно-ортогональных направляющих, AB=0,5 м. В положении стержня, изображённом на рисунке, V_A=0,4 м/с, a_A= 0,3 м/с^2 . Определить ускорение точки B , угловое ускорение стержня AB в этом положении. Сделать проверку через МЦУ.

Решение.



Определим МЦС стержня AB.

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB\sin 60^0} = \frac{0{,}4}{0{,}5\cdot\sqrt{3}/2} \approx 0{,}92\ \text{рад/с}$$

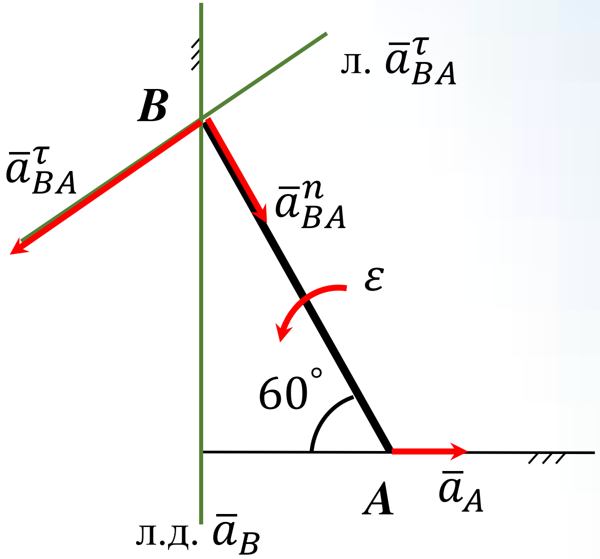
Примем за полюс точку A, тогда:

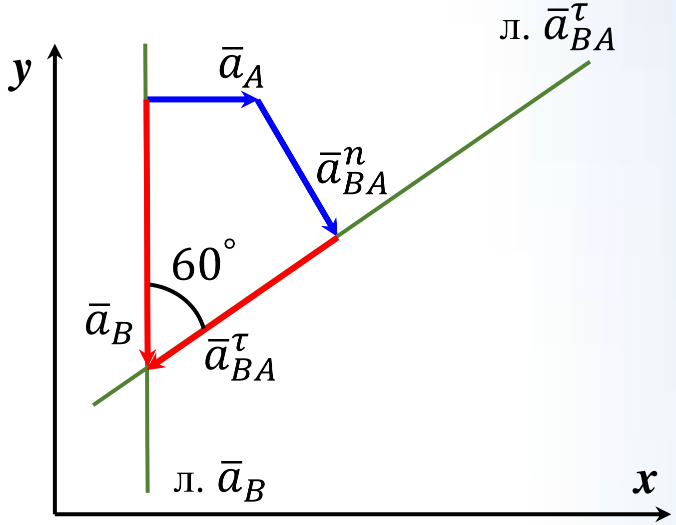
$$\bar a_B = \underline{\underline{\bar a}}_A + \underline{\underline{\bar a}}{}^n_{BA} + \bar a^\tau_{BA} \qquad (1)$$

$$a^n_{BA} = \omega^2 AB = 0{,}92^2\cdot 0{,}5 \approx 0{,}42\ м/с^2$$

$\bar a^\tau_{BA} \perp AB$, траектория точки В прямая.

Строим векторный многоугольник ускорений.





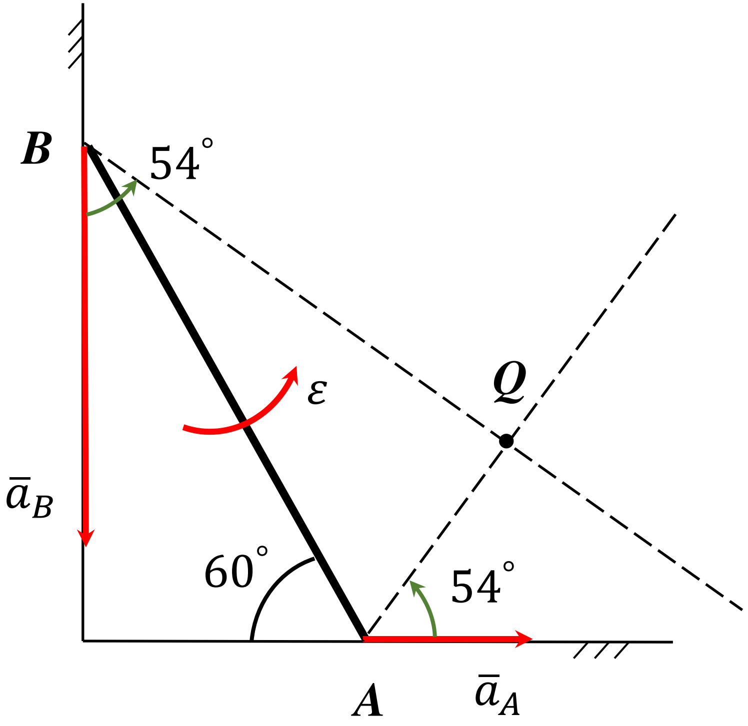
Спроецируем векторное уравнение (1) на оси x,y:

$$\begin{cases} x: \quad 0 = a_A + a^n_{BA}\cos 60^0 - a^\tau_{BA}\sin 60^0 \\ y: \quad -a_B = -a^n_{BA}\sin 60^0 - a^\tau_{BA}\cos 60^0 \end{cases}$$

$a_B \approx 0{,}66\ м/с^2$, $a^\tau_{BA} \approx 0{,}59\ м/с^2$. Тогда $\varepsilon = \dfrac{a^\tau_{BA}}{AB} = \dfrac{0{,}59}{0{,}5} \approx 1{,}18$ рад/с^2.

Направление угловой стрелки ε определяем в соответствиис вектором $\bar a^\tau_{BA}$.

Пример 1 (продолжение).



Определим положение МЦУ

$$\alpha = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2} = arctg\,\frac{1{,}18}{0{,}92^2} \approx 54^0$$

От векторов ускорений в направлении угловой стрелки ε откладываем лучи под углом 54°.

Из $\Delta\, ABQ$ определяем расстояния до МЦУ:

$$BQ = AB\sin 66^\circ \approx 0{,}456 \text{ м}$$

$$AQ = AB\sin 24^\circ \approx 0{,}203 \text{ м}$$

Проверим выполнение соотношения:

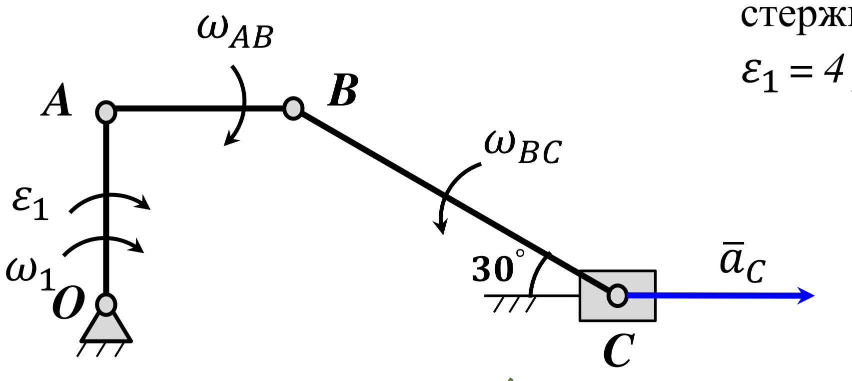
$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{1{,}18^2 + 0{,}92^4} \approx 1{,}46 \text{ рад/с}^2$$

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{0{,}3}{0{,}203} \approx 1{,}46 \text{ рад/с}^2 \qquad \frac{a_B}{BQ} = \frac{0{,}66}{0{,}456} \approx 1{,}45 \text{ рад/с}^2$$

Пример 2.

Для заданного положения механизма определить угловые ускорения стержней *AB* и *BC* и ускорение точки *B*. Если $OA = AB = 1$ *м*, $\omega_1 = 1$ *рад/с*, $\varepsilon_1 = 4$ *рад/ с*^{2}, $\omega_{AB} = \sqrt{3}$ *рад/с*, $\omega_{BC} = 1$ *рад/с*, $a_C = 1$ *м/с*^{2}.



Решение.

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 1 \cdot 1 = 1 \text{ м}/c^2\,, \quad a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м}/c^2$$

Примем за полюс точку *A*.

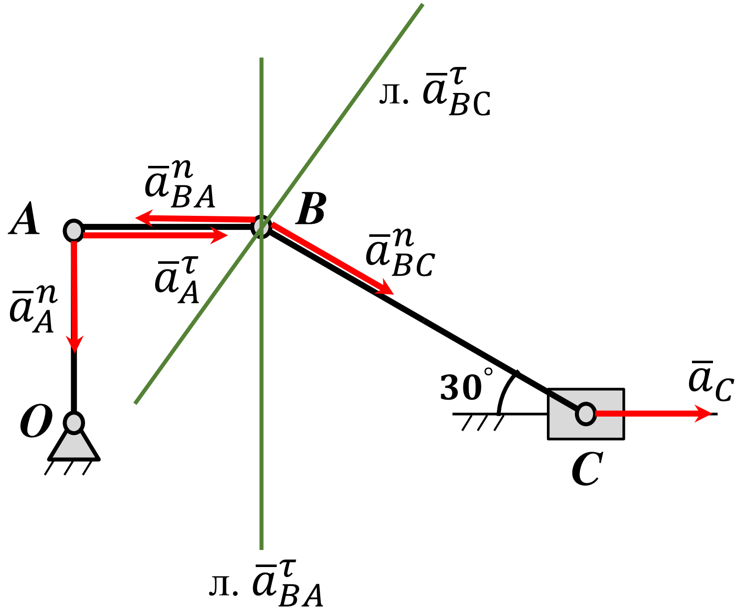
$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_A^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_A^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}} + \underline{\bar{a}_{BA}^\tau}\,,$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 3 \cdot 1 = 3 \text{ м}/c^2, \quad \bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$$

Примем за полюс точку *C*.

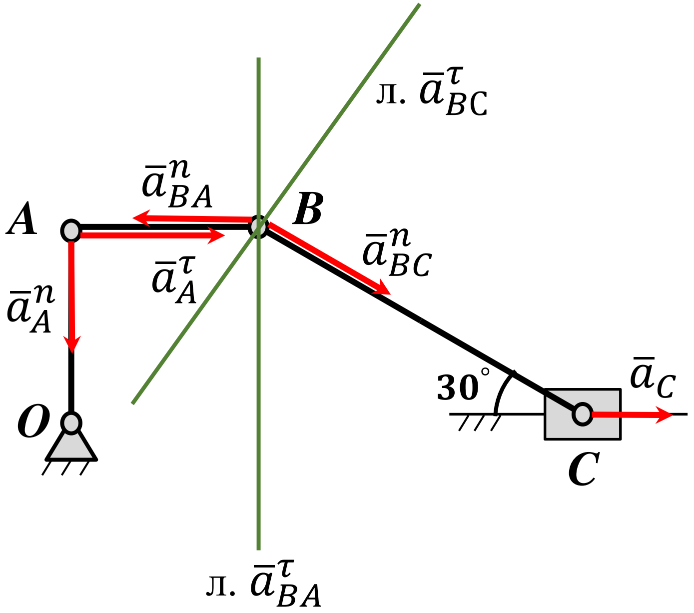
$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BC}^n}} + \underline{\bar{a}_{BC}^\tau}\,,$$

$$a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}/c^2, \qquad \bar{a}_{BC}^\tau \perp BC$$



$$\underline{\underline{\bar{a}_A^\tau}} + \underline{\underline{\bar{a}_A^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}} + \underline{\bar{a}_{BA}^\tau} = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BC}^n}} + \underline{\bar{a}_{BC}^\tau}$$

Пример 2 (продолжение).



По векторному уравнению строим многоугольник ускорений.

$$\underline{\underline{\bar{a}^{\tau}_{A}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{n}_{A}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{n}_{BA}}} + \underline{\bar{a}^{\tau}_{BA}} = \underline{\underline{\bar{a}_{C}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{n}_{BC}}} + \underline{\bar{a}^{\tau}_{BC}} \qquad (1)$$

Спроецируем векторное уравнение (1) на оси x, y:

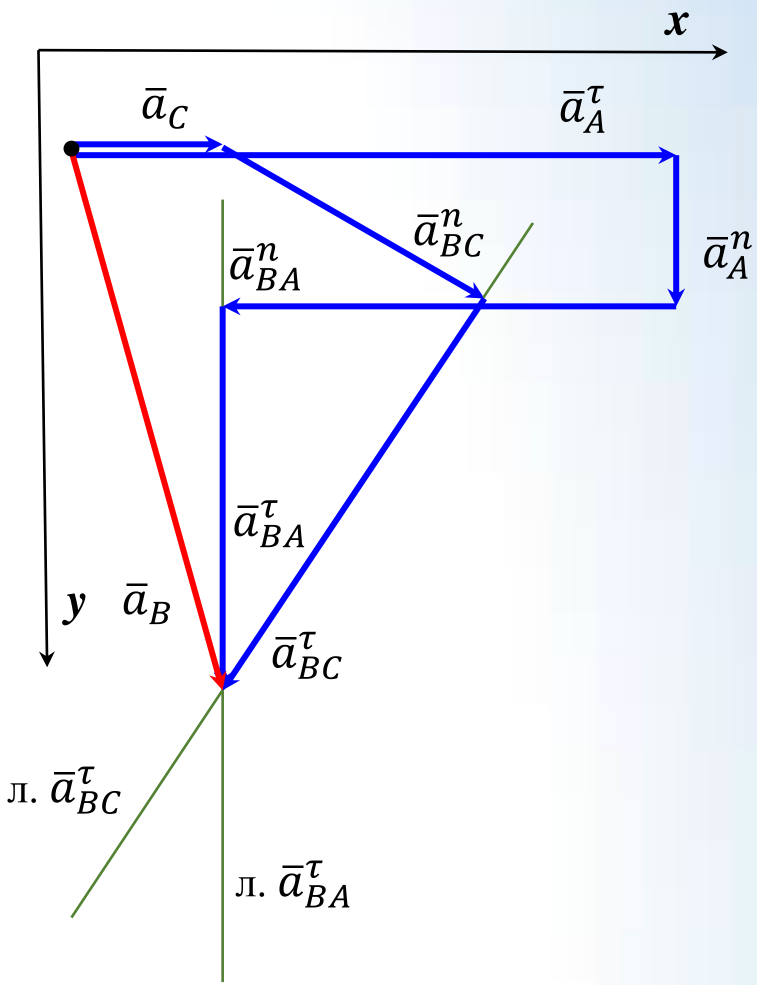
$$x\colon\ a^{\tau}_{A} - a^{n}_{BA} = a_{C} + a^{n}_{BC}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{BC}\cos 60^{\circ}$$

$$y\colon\ a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA} = a^{n}_{BC}\sin 30^{\circ} + a^{\tau}_{BC}\cos 30^{\circ}$$

$$a^{\tau}_{BC} = 2\sqrt{3}\ \text{м/с}^2,\ a^{\tau}_{BA} = 3\ \text{м/с}^2$$

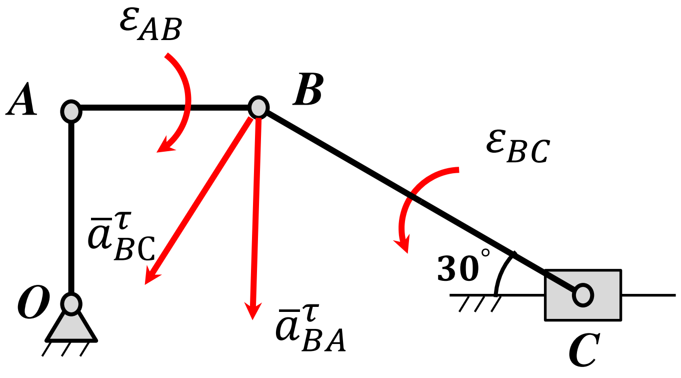
Тогда ускорение точки **B**:

$$a_{B} = \sqrt{(a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA})^2 + (a^{\tau}_{A} - a^{n}_{BA})^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ \text{м/с}^2$$



$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 3\ \text{рад/с}^2$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a^{\tau}_{BC}}{BC} = \sqrt{3}\ \text{рад/с}^2$$



Направление угловых стрелок ε_{AB} и ε_{BC} определяем в соответствии с векторами $\bar{a}^{\tau}_{BA}, \bar{a}^{\tau}_{BC}$.