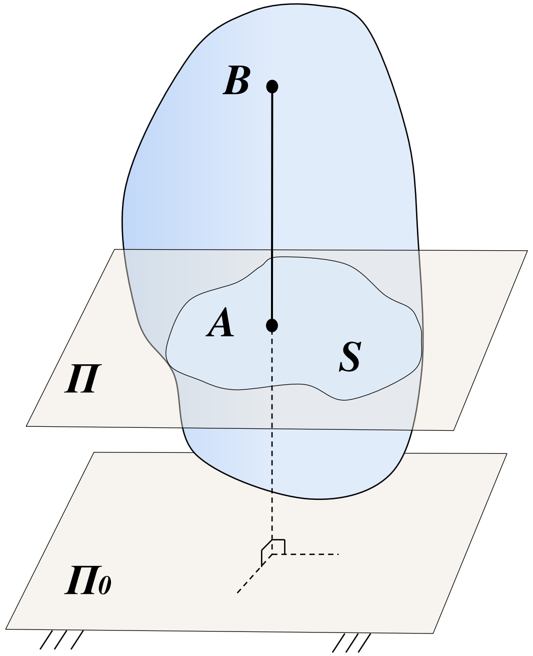
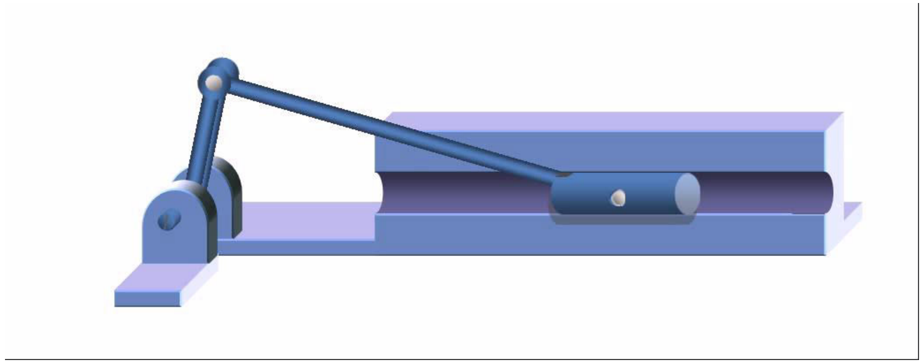
Плоское движение твёрдого тела.

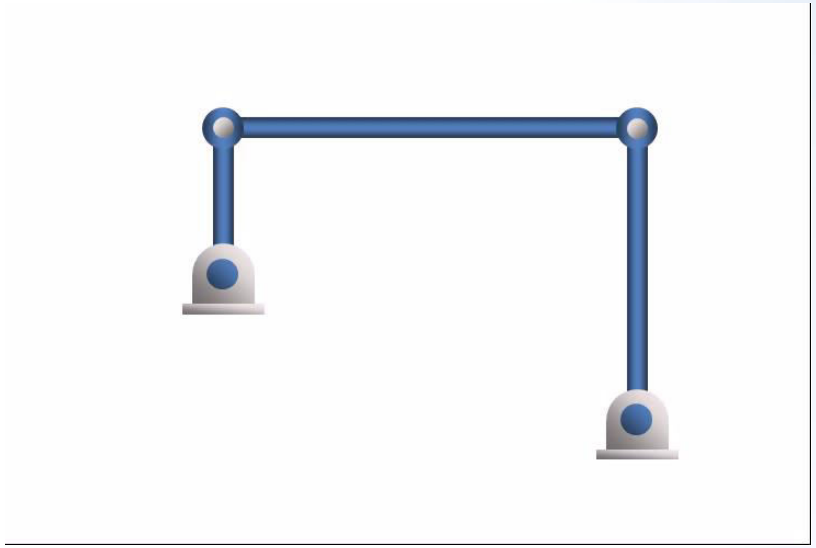
МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Плоским или плоскопараллельным движением твёрдого тела называют такое его движение, при котором точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.



Любая прямая ***AB***, перпендикулярная плоскости и жёстко связанная с телом, движется поступательно, следовательно, все точки этой прямой движутся одинаково. Поэтому для изучения плоского движения тела достаточно изучить движение лишь одного сечения ***S*** тела плоскостью, параллельной основной неподвижной плоскости ***$П_0$***, т.е. движение плоской фигуры в своей плоскости.

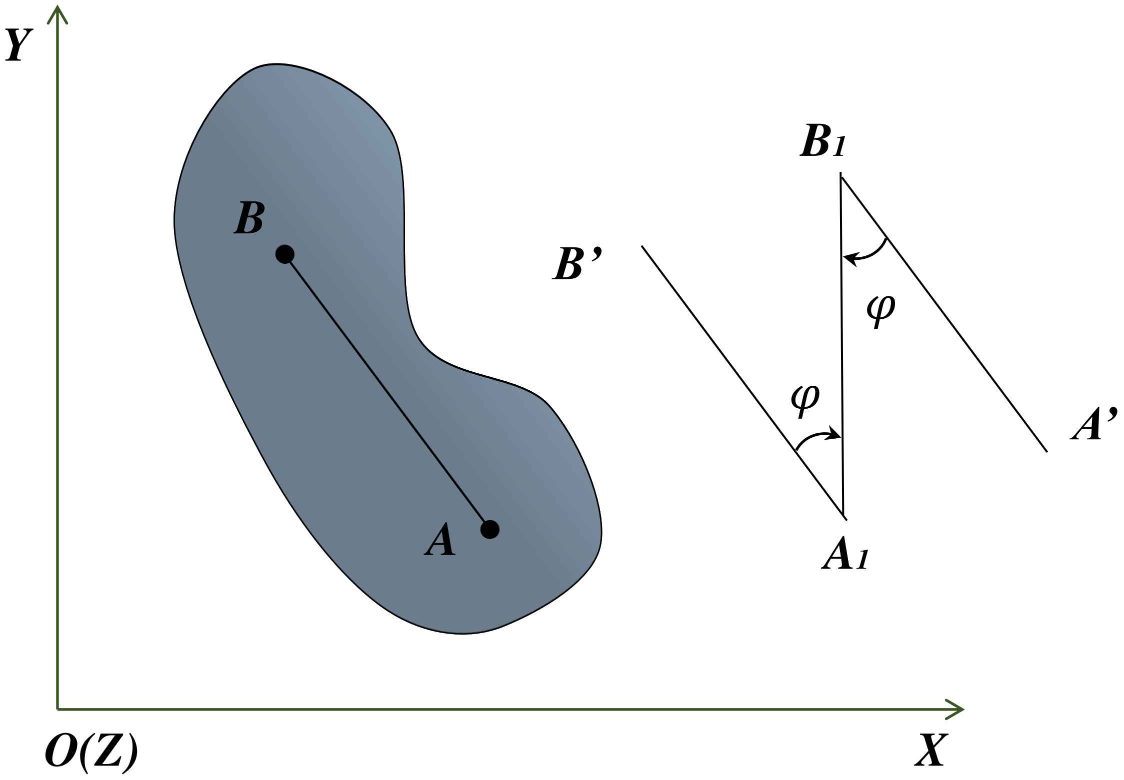




МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Плоское движение твёрдого тела.

Теорема. Всякое перемещение плоской фигуры в своей плоскости можно представить как совокупность двух перемещений: поступательного вместе с точкой, выбранной за полюс, и поворота относительно оси, проходящей через полюс, перпендикулярно плоскости фигуры.



1. Примем за полюс точку A.
Поступательное движение $AB \parallel A_1B'$
Поворот на угол φ
2. Примем за полюс точку B.
Поступательное движение $AB \parallel B_1A'$
Поворот на угол φ

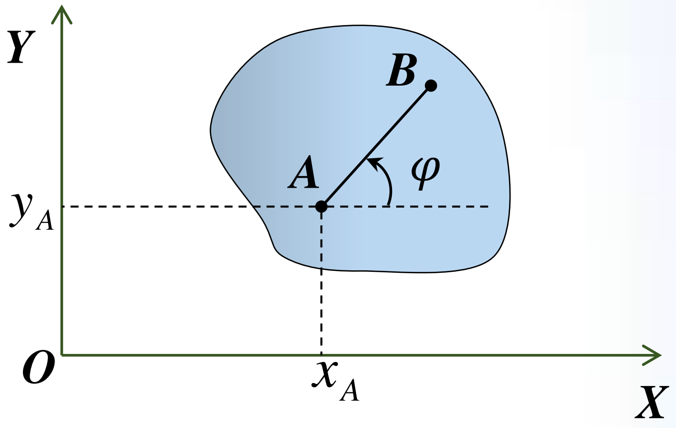
$A_1B' \parallel B_1A' \Rightarrow$ углы поворота относительно разных полюсов равны.

При плоском движении величина и направление угла поворота плоской фигуры не зависят от выбора полюса.

Уравнения плоского движения твердого тела имеют вид:

$$x_A = f_1(t),$$
$$y_A = f_2(t),$$
$$\varphi = f_3(t).$$

При плоском движении тело имеет **3 степени свободы.**



Скорости точек твердого тела при плоском движении.

Угловая скорость и угловое ускорение вводятся по аналогии с вращательным движением :

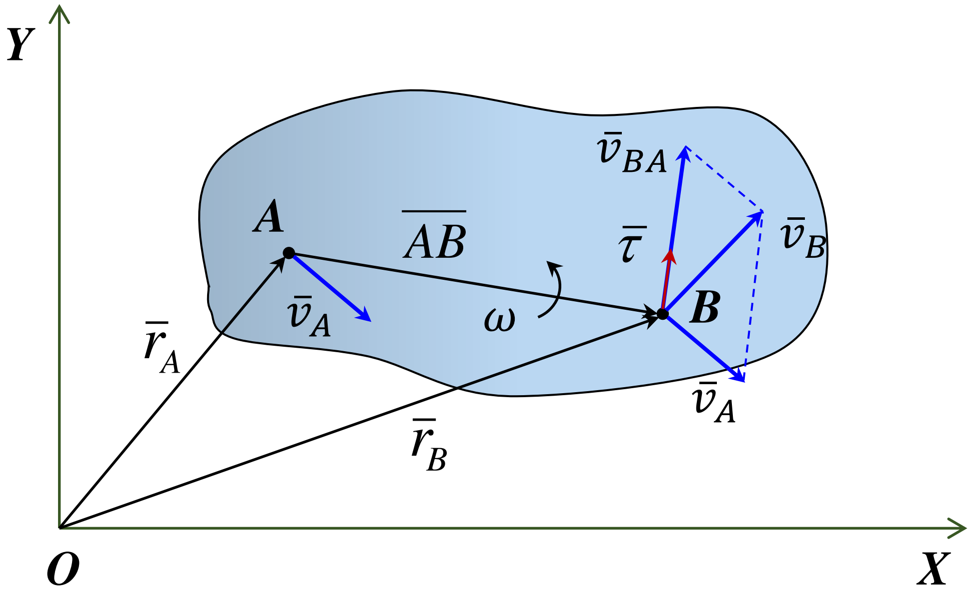
$$\omega_z = \dot{\varphi};\ \varepsilon_z = \ddot{\varphi};$$

$$\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|;\ \varepsilon = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|.$$

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ считают направленными вдоль подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре.

Поскольку вращательная составляющая плоского движения не зависит от выбора полюса, то $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ **являются свободными векторами**.

Теорема. Скорость любой точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса фигуры и скорости этой точки при вращения фигуры вокруг полюса.



$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}, \qquad \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = \bar{v}_{BA},$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

$\left|\overline{AB}\right| = const$ - как расстояние между точками в твердом теле

$$\bar{v}_{BA} = \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = \left|\overline{AB}\right|\frac{d\varphi}{dt}\bar{\tau} = AB\dot{\varphi}\bar{\tau}; \qquad v_{BA} = \omega \cdot AB$$

Вектор $\bar{v}_{BA} \perp AB$ и соответствует направлению дуговой стрелки ω.

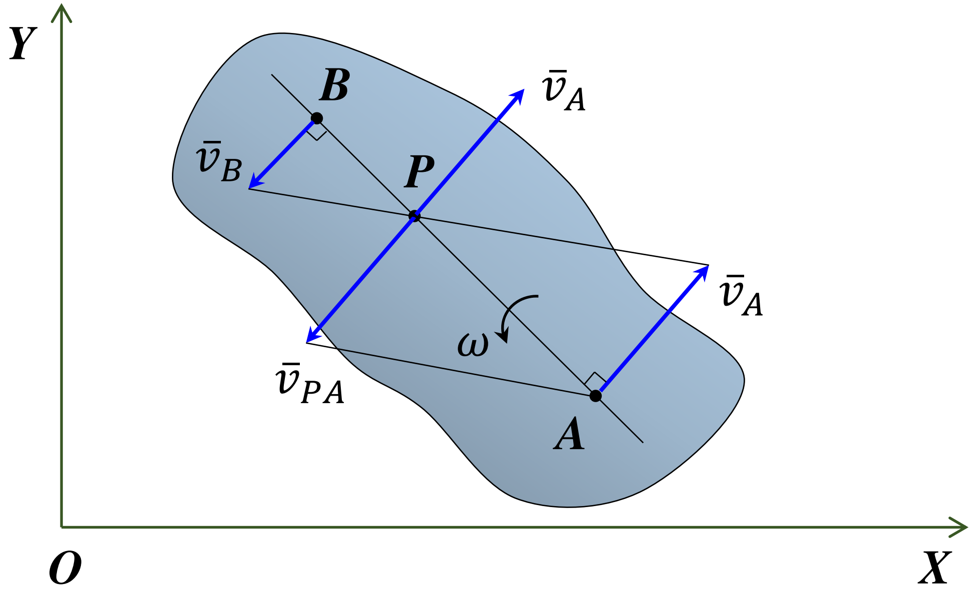
По формуле Эйлера: $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$.

Окончательно: $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$.

Мгновенный центр скоростей.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку принято обозначать буквой P .

Теорема. Если плоская фигура движется в своей плоскости не поступательно, то в любой момент времени МЦС существует и единственен.



$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = 0$$

$$\bar{v}_A = -\bar{v}_{PA}$$

$$|\bar{v}_A| = |\bar{v}_{PA}|\,,\ v_A = \omega \cdot AP\,,$$

$$AP = \frac{v_A}{\omega}$$

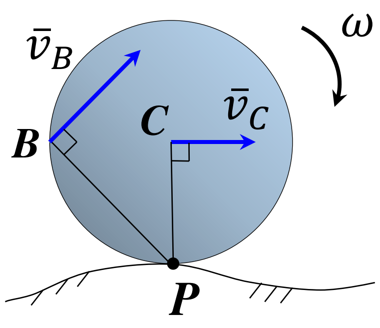
$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}\,; \quad v_B = v_{BP} = \omega \cdot BP.$$

В данный момент времени скорости точек плоской фигуры вычисляются так же, как если бы фигура вращалась вокруг неподвижной оси, проходящей через МЦС перпендикулярно плоскости движения, с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

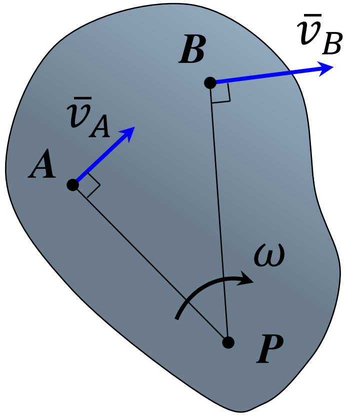
МЦС называют **мгновенным центром вращения.**
Ось Pz вокруг которой в данный момент времени происходит вращение тела, перпендикулярную плоскости фигуры и проходящую через МЦС, называют **мгновенной осью вращения**.

Способы определения МЦС.

1. Из физических соображений: качение без скольжения по неподвижной поверхности. Точка ***P*** является МЦС.

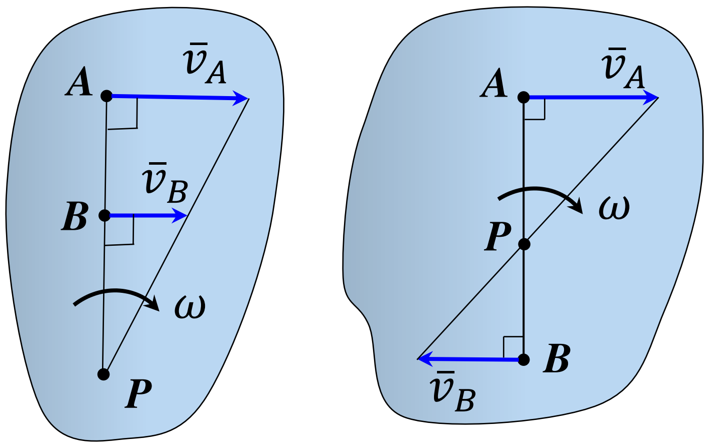


2. По скоростям двух точек.
Если известны скорости двух точек плоской фигуры, то МЦС находится на пересечении перпендикуляров к этим точкам.

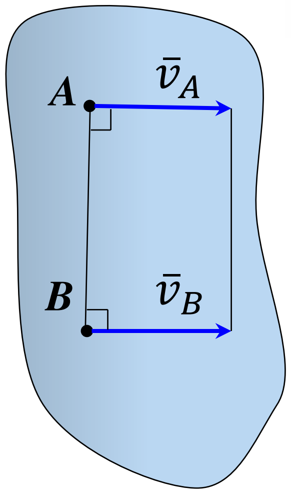


$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega$$

3. Если $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ и $\bar{v}_A \perp AB$



Мгновенно-поступательное движение



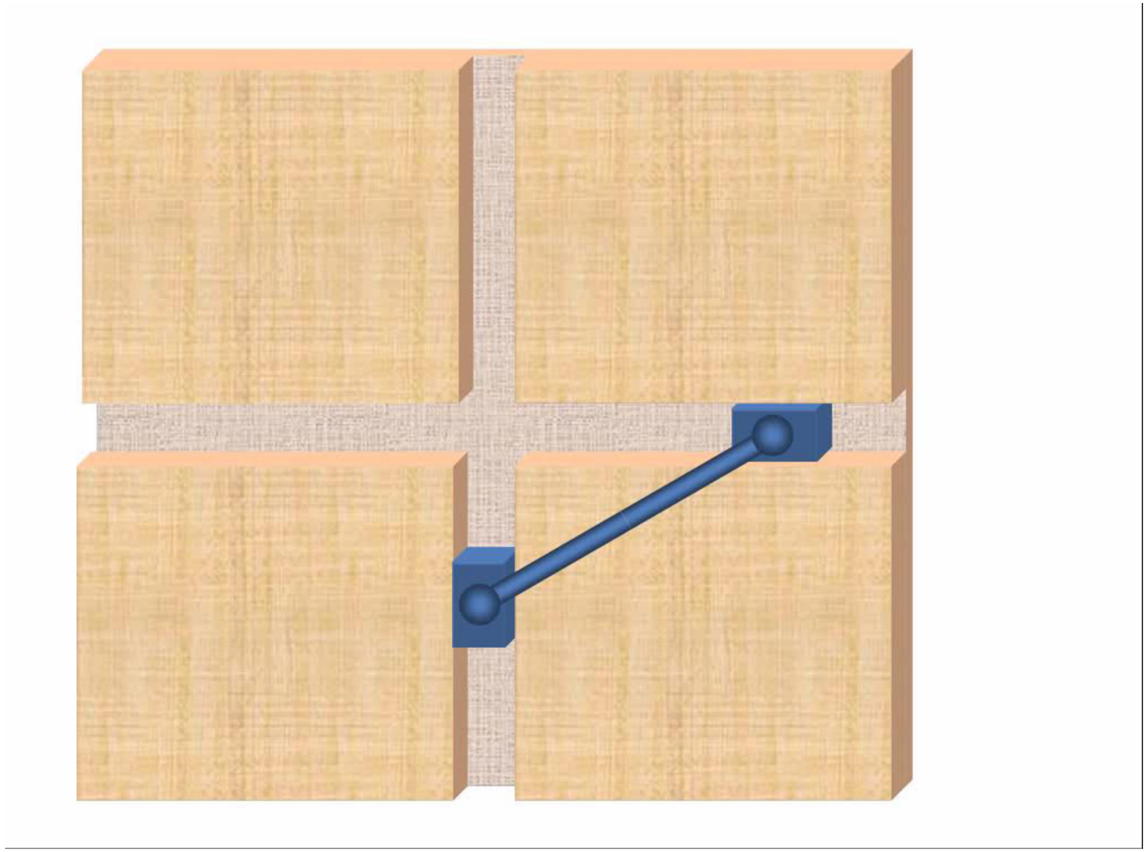
$$\bar{v}_A = \bar{v}_B$$
$$\omega = 0$$

Центроиды.

Мгновенный центр вращения при плоском движении тела меняет свое положение как на неподвижной плоскости, в которой движется фигура, так и на связанной с ней подвижной плоскости.

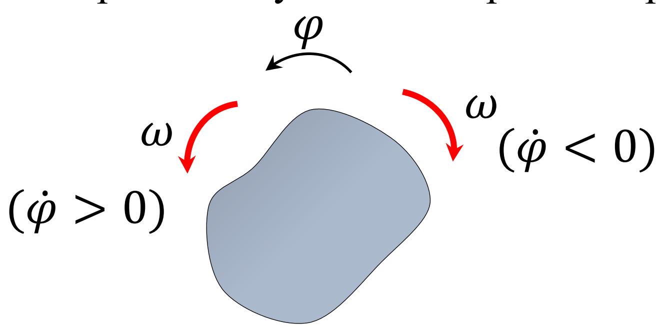
Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называется **неподвижной центроидой.** Геометрическое место этих же центров на подвижной плоскости, связанной с движущейся фигурой, называется **подвижной центроидой.**

При движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.



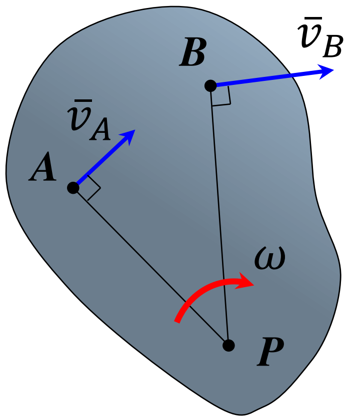
Способы вычисления угловой скорости при плоском движении.

1. Если известно уравнение движения $\varphi = \varphi(t)$, то по определению:
   $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости определяется знаком производной.



2. Если известно положение МЦС, то $\quad \omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}$

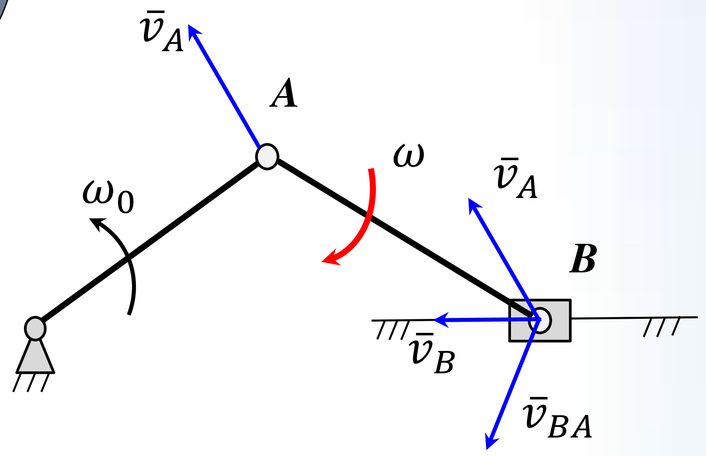
Направление угловой скорости определяется по направлению скоростей точек.



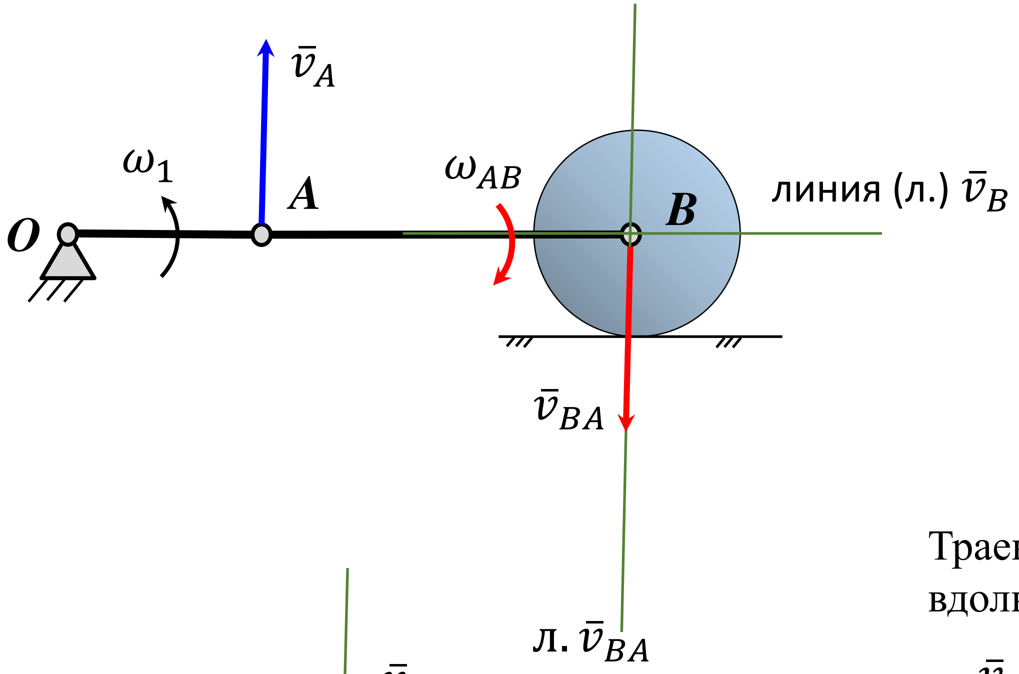
3. По теореме о сложении скоростей $\quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\,,\ v_{BA} = \omega \cdot AB.$

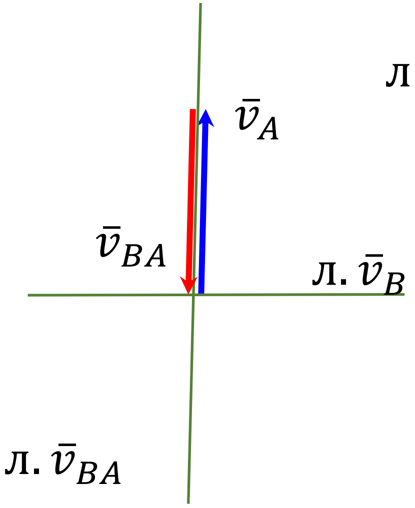
$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB}$$

Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\bar{v}_{BA}$.



Пример 1.





Для заданного положения механизма определить угловую скорость шатуна AB и скорость точки B, если $AB = 2OA = 1$ м и угловая скорость кривошипа OA равна $\omega_1 = 1$ рад/с.

Решение.

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \text{ м/с}$$

Примем за полюс точку A, тогда для точки B имеем:

$$\underline{\bar{v}_B} = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\bar{v}_{BA}}$$

Траектория точки B – прямая, следовательно $\bar{v}_B$ направлена вдоль этой прямой.

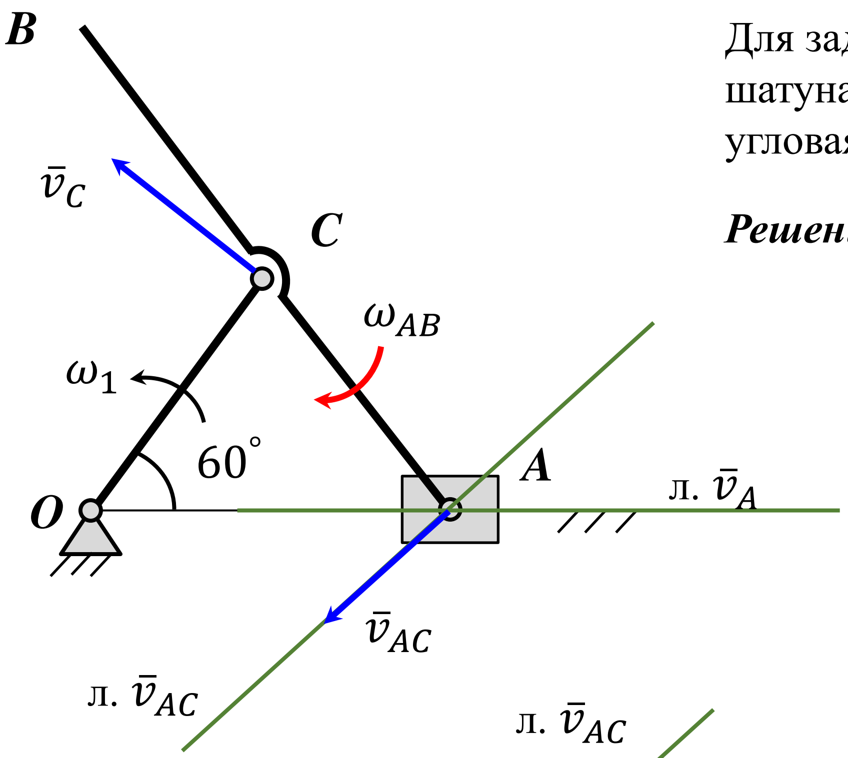
$$\bar{v}_{BA} \perp AB$$

$$\bar{v}_{BA} = -\bar{v}_A\,, \quad \bar{v}_B = 0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \text{ рад/с}$$

Направление угловой скорости определяем по вектору скорости $\bar{v}_{BA}$.

Пример 2.



Для заданного положения механизма определить угловую скорость шатуна AB и скорость точки B, если $OC = BC = AC = 0{,}25$ м и угловая скорость кривошипа OC равна $\omega_1 = 4$ рад/с .

Решение.

$$v_C = \omega_1 \cdot OC = 4 \cdot 0{,}25 = 1 \ м/с$$

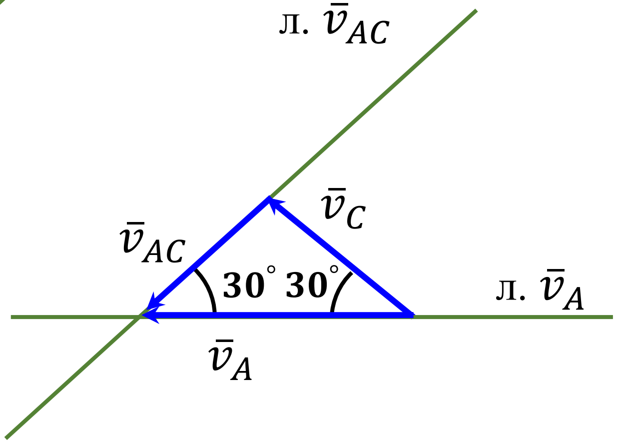
Примем за полюс точку C.

$$\underline{\bar{v}}_A = \underline{\underline{\bar{v}}}_C + \underline{\bar{v}}_{AC}$$

Траектория точки A – прямая, следовательно $\bar{v}_A$ направлена вдоль этой прямой.

$$\bar{v}_{AC} \perp AB$$

Из треугольника скоростей $\quad v_{AC} = v_C = 1 \ м/с$

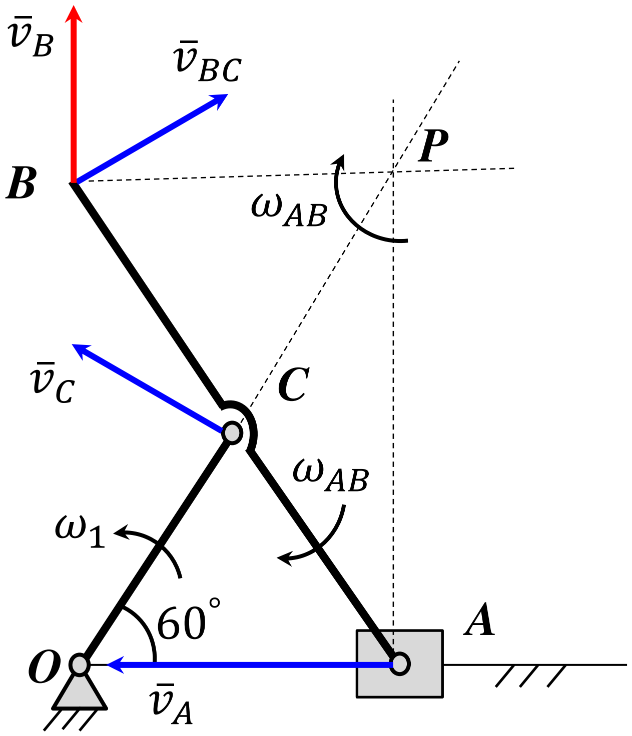


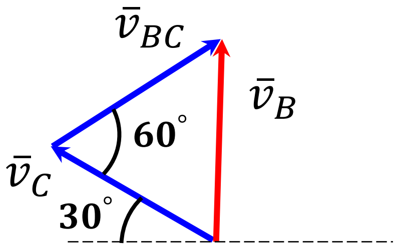
$$v_A = 2v_C \cos 30^o = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \approx 1{,}7 \ м/с$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AC}}{AC} = \frac{1}{0{,}25} = 4 \ рад/с$$

Направление угловой скорости определяем по направлению скорости $\bar{v}_{AC}$.

Пример 2 (продолжение).





Приняв за полюс точку C, для скорости точки B имеем:

$$\bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BC}}}$$

$$v_{BC} = \omega_{AB} \cdot BC = 4 \cdot 0{,}25 = 1 \text{ м/с}$$

$$\bar{v}_{BC} \perp BC$$

Из треугольника скоростей

$$v_B = v_C = v_{BC} = 1 \text{ м/с}$$

Проверка через МЦС.

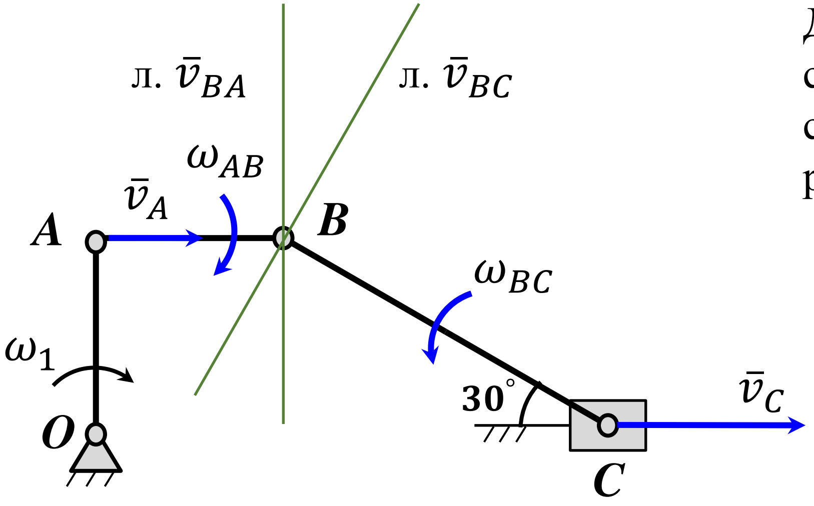
$$CP = \frac{OP}{2} = \frac{AB}{2} = 0{,}25 \text{ м}$$

$$\mathrm{BP} = \mathrm{CP} = 0{,}25 \text{ м}$$

$$AP = OA \cdot tg60^\circ = 0{,}25\sqrt{3} \text{ м}$$

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP} = \omega_{AB} \qquad \frac{\sqrt{3}}{0{,}25\sqrt{3}} = \frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ рад/с}$$

Пример 3.



Для заданного положения механизма определить угловые скорости стержней AB и BC и скорость точки B, если $OA = AB = 1$ *м*, угловая скорость кривошипа OA равна $\omega_1 = 1$ *рад/с*, скорость ползуна C равна $v_C = 2$ *м/с*.

Решение.

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 1 = 1 \text{ м/с}$$

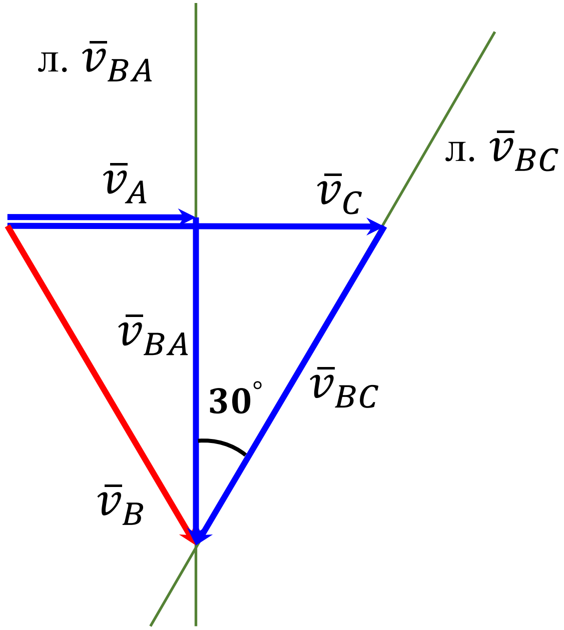
Примем за полюс точку A.

$$\bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\bar{v}_{BA}}, \quad \bar{v}_{BA} \perp AB$$

Примем за полюс точку C.

$$\bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\bar{v}_{BC}}, \quad \bar{v}_{BC} \perp BC$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\bar{v}_{BA}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\bar{v}_{BC}}$$



Из векторной диаграммы скоростей: $v_B = v_{BC} = \dfrac{v_A}{sin30^\circ} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2\text{м/с}$

$$v_{BA} = v_{BC} cos30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ м/с}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \text{ рад/с}, \quad \omega_{BC} = \frac{v_{BC}}{BC} = \frac{2}{2} = 1 \text{ рад/с}.$$

Направление угловых скоростей определяем по векторам скоростей $\bar{v}_{BA}$ и $\bar{v}_{BC}$.