Кинематика твердого тела

Абсолютно твёрдым телом в теоретической механике называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остаются постоянными.

Число степеней свободы твердого тела – минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве.

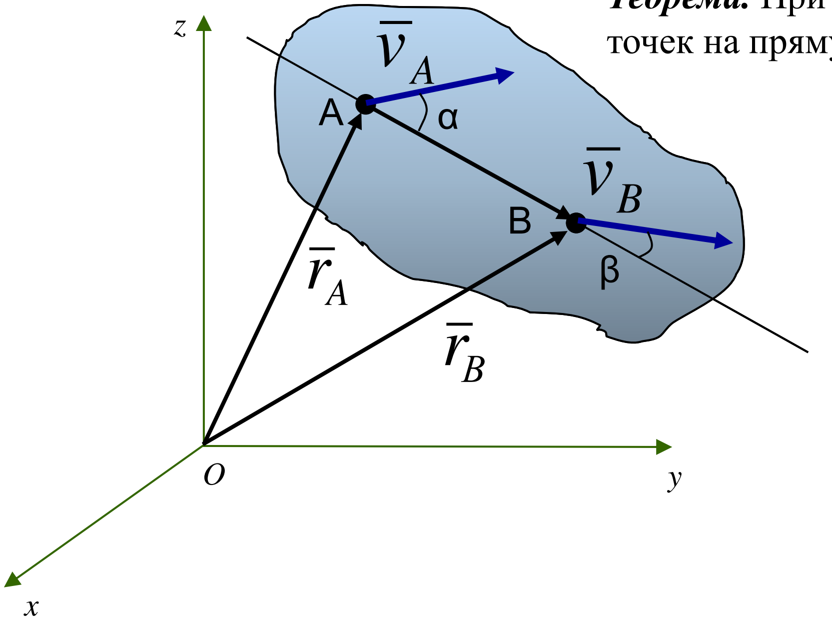
Основные задачи кинематики твердого тела

- Задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом.
- Определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Простейшие движения твердого тела

- Поступательное движение твердого тела
- Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Основная теорема кинематики твердого тела



Теорема. При любом движении твердого тела проекции скоростей точек на прямую, соединяющую эти точки равны.

$$\overline{r}_B - \overline{r}_A = \overline{AB}.$$

Возводя в квадрат правую и левую части, получим:

$$(\overline{r}_B - \overline{r}_A)^2 = \overline{AB}^2$$

$$\left|\overline{AB}\right| = const$$

Дифференцируем по времени это соотношение

$$2(\overline{r}_B - \overline{r}_A)\left(\frac{d\overline{r}_B}{dt} - \frac{d\overline{r}_A}{dt}\right) = 0.$$

Поскольку в этом равенстве $(\overline{r}_B - \overline{r}_A) = \overline{AB}$; $\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \overline{v}_B$; $\frac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{v}_A$, то

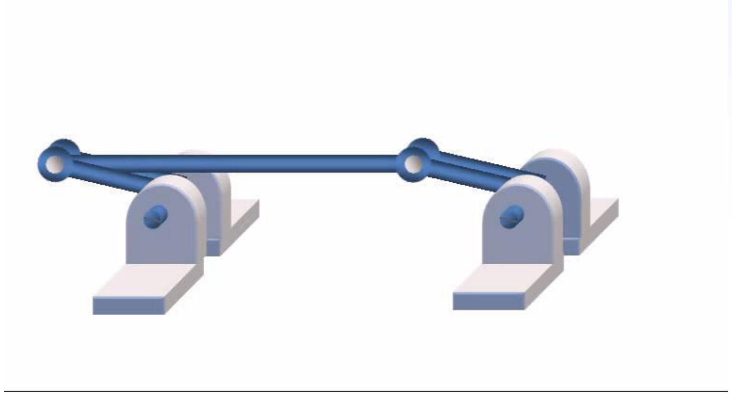
$2\overline{AB}(\overline{v}_B - \overline{v}_A) = 0$ или $\overline{AB}\cdot\overline{v}_B = \overline{AB}\cdot\overline{v}_A$. Раскрывая скалярное произведение, получим:

$$v_B\cos\beta = v_A\cos\alpha$$

Поступательное движение твердого тела

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

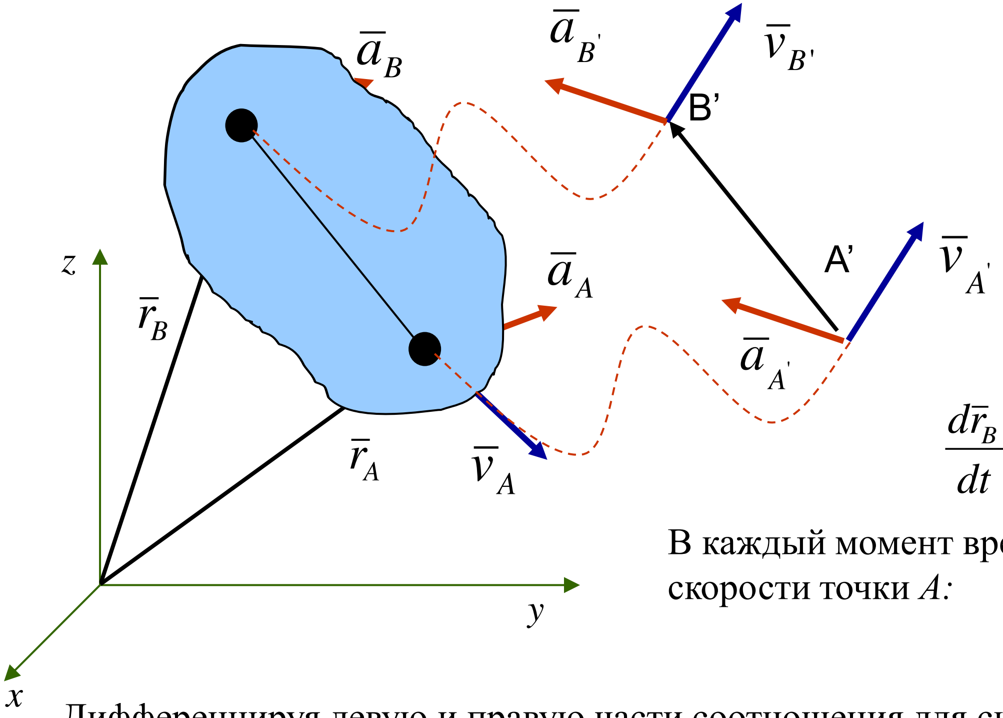
Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки в этом теле, будет оставаться параллельной своему первоначальному положению на протяжении всего времени движения.



Свойства поступательного движения:

1) траектории всех точек тела, совершающего поступательное движение конгруэнтны, т.е. одинаковы и могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом;
2) скорости всех точек тела одинаковы;
3) ускорения всех точек тела одинаковы.

Поступательное движение твердого тела



Для любых двух точек А и В

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$$
$$\overline{AB} = \overline{const}.$$

Дифференцируя по времени правую и левую части соотношения для радиус-векторов, получим:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}, \quad \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt}.$$

В каждый момент времени скорость точки *B* геометрически равна скорости точки *A:*

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A.$$

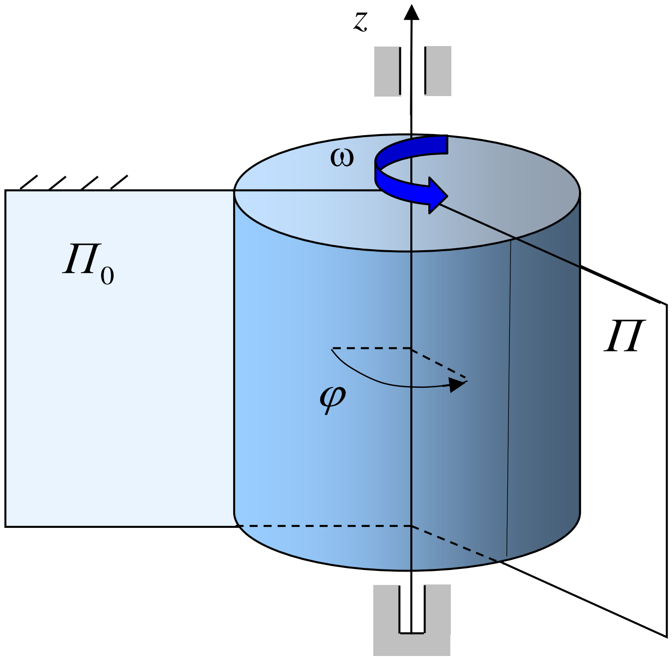
Дифференцируя левую и правую части соотношения для скоростей, получим:

$$\frac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

Свободное твердое тело при поступательном движении имеет **три степени свободы.**

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси или вращательным движением называется такое движение, при котором в теле можно выделить прямую, все точки которой будут оставаться неподвижными во время движения. Эта прямая называется **осью вращения** твердого тела.

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость Π_0 и подвижную Π, жестко связанную с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двугранным углом между плоскостями. Этот угол называется углом поворота тела.

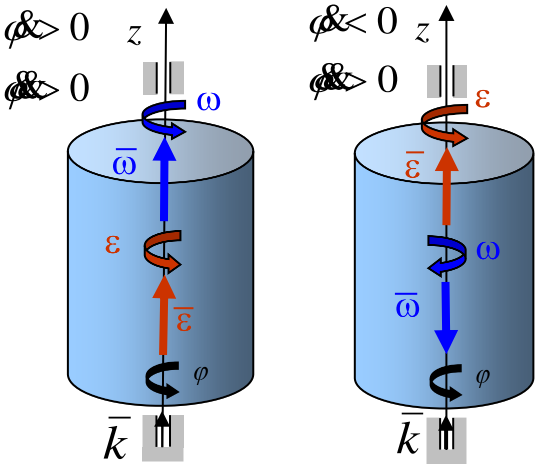
Таким образом, при вращательном движении тело имеет **одну степень свободы.**

$\varphi = \varphi(t)$ закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t} = \omega_{cp}$ - средняя угловая скорость, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ - алгебраическая угловая скорость.

Угловая скорость на чертеже изображается дуговой стрелкой, направленной в сторону вращения.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Вектор угловой скорости $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}$, $\omega_z = \bar{\omega}\bar{k} = \dot{\varphi}$

$\omega = |\bar{\omega}| = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическое угловое ускорение $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi}\bar{k}$, $\varepsilon_z = \bar{\varepsilon}\bar{k} = \ddot{\varphi}$

$\varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$.

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ - это скользящие вектора

$\bar{\omega} \uparrow\uparrow \bar{\varepsilon}$ ускоренное вращение

$\bar{\omega} \uparrow\downarrow \bar{\varepsilon}$ замедленное вращение

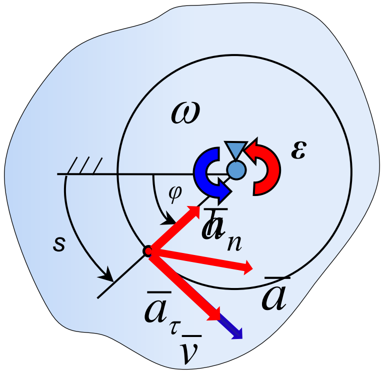
Скалярные выражения для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.

$$s(t) = h\varphi(t); \quad v_\tau = \dot{s} = h\dot{\varphi}; \quad v = h\omega.$$

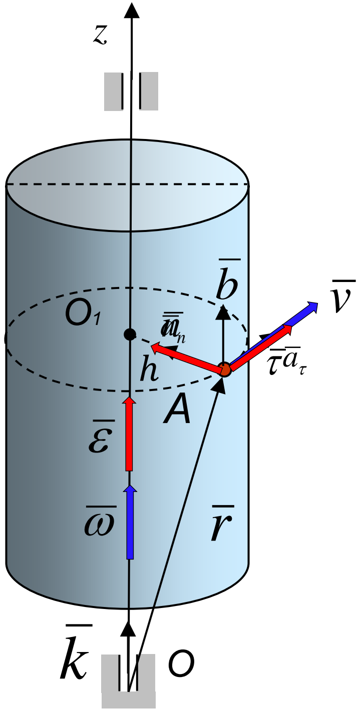
Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a_\tau = \ddot{s} = h\ddot{\varphi}; \quad a_n = v^2/\rho = h^2\omega^2/h = h\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$



Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении



Получим векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.

$$\bar{r} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}, \qquad \overline{OO_1} = OO_1\bar{k}, \qquad \overline{O_1A} = -h\bar{n}, \qquad \overline{OO_1} = \overline{const}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -h\frac{d\bar{n}}{dt}, \qquad \frac{d\bar{n}}{dt} = -\dot{\varphi}\bar{\tau} \;\Rightarrow\; \bar{v} = h\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

Поскольку $\bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{b} = \bar{n} \times \bar{k}$, то:

$$\bar{v} = h\dot{\varphi}(\bar{n} \times \bar{k}) = \dot{\varphi}\bar{k} \times (-h\bar{n}) = \dot{\varphi}\bar{k} \times (OO_1\bar{k} - h\bar{n})$$

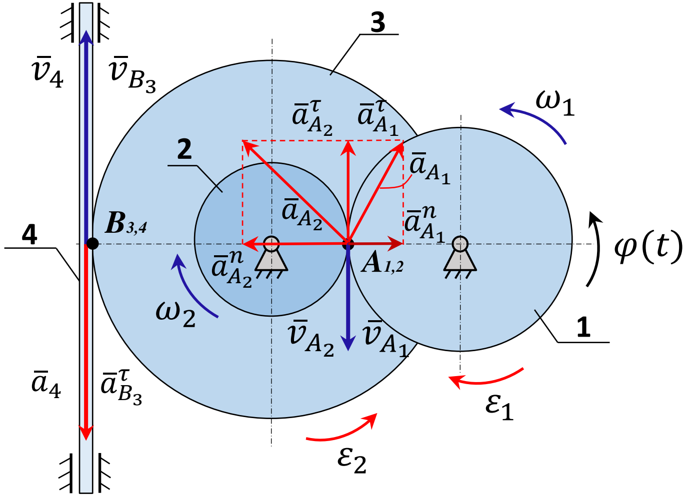
Окончательно получаем: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ – **формула Эйлера.**

Дифференцируя формулу Эйлера по времени, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

$$\overline{a_\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\,; \quad \overline{a_n} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Пример 1



Дано:
$\varphi(t) = 3t - t^2$*рад*, ***R1*** =*10см*, ***R2***=*5см*, ***R3*** =*20см*, ***t*** =*1с*
Найти: $v_{A_1} v_{A_2}, a_{A_1}, a_{A_1}, v_4, a_4$

Решение.

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = 3 - 2t = 1\text{рад}/c, \quad \omega_1 = |\omega_{1z}| = 1\text{рад/с}$$

$$v_{A_1} = \omega_1 R_1 = 10\text{см/с}, \quad v_{A_1} = v_{A_2},$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \qquad \omega_2 = \frac{v_{A_1}}{R_2} = 2\text{рад/с}$$

$$\omega_3 = \omega_2, \qquad v_{B_3} = v_{B_4} = v_4 = \omega_3 R_3 = 40\text{см/с}$$

$$\varepsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = -2\text{рад/с}^2, \quad \varepsilon_1 = |\varepsilon_{1z}| = 2\text{рад/с}^2,$$

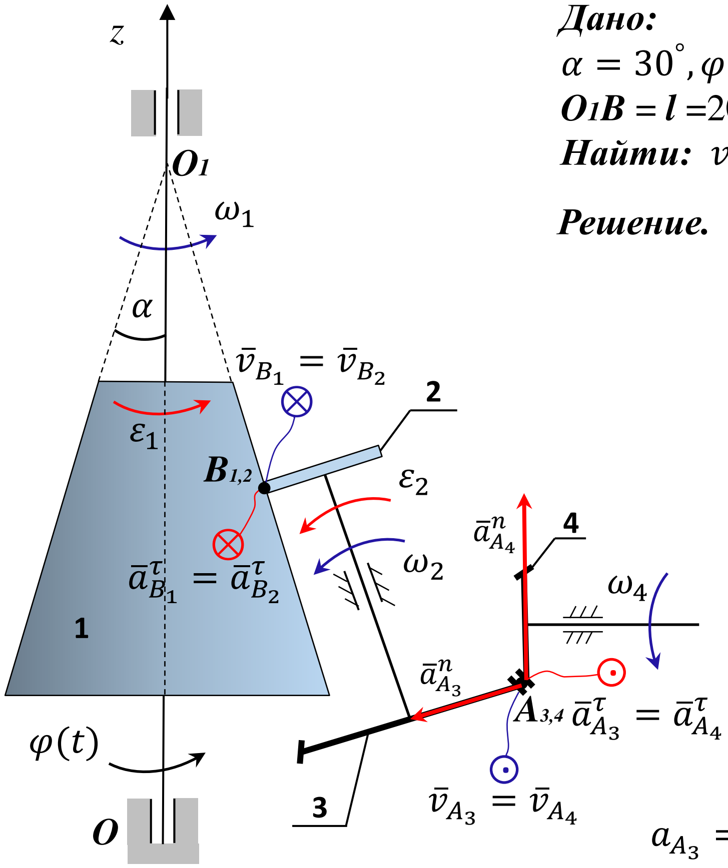
$$a^{\tau}_{A_1} = \varepsilon_1 R_1 = 20\text{см/с}^2, \quad a^{\tau}_{A_1} = a^{\tau}_{A_2}, \qquad \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{A_1}}{R_2} = 4\ \text{рад/с}^2, \quad a^{n}_{A_1} = \omega_1^2 R_1 = 10\text{см/с}^2, \quad a^{n}_{A_2} = \omega_2^2 R_2 = 20\text{см/с}^2, \quad a^{\tau}_{B_3} = a^{\tau}_{B_4} = a_4 = \varepsilon_3 R_3 = 80\text{см/с}^2$$

$$a_{A_1} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_1} + a^{n2}_{A_1}} \approx 22{,}36\ \text{см/с}^2, \quad a_{A_2} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_2} + a^{n2}_{A_2}} \approx 28{,}28\ \text{см/с}^2$$

Пример 2

МГТУ им.
Н.Э. Баумана



Дано:

$\alpha = 30^{\circ}, \varphi(t) = 2t^2$ рад, R_2=5см, R_3=10см, R_4=5см, t =1с

$O_1B = l$ =20см

Найти: $v_{A_{3,4}}, a_{A_{3,4}}$

Решение.

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = 4t = 4\text{рад/с}, \quad \omega_1 = |\omega_{1z}| = 4\text{рад/с}$$

$$v_{B_1} = \omega_1 l \sin\alpha = 40\text{см/с}, \quad v_{B_1} = v_{B_2}, \quad v_{B_2} = \omega_2 R_2$$

$$\omega_2 = \frac{v_{B_2}}{R_2} = 8\text{ рад/с}, \quad \omega_3 = \omega_2, \quad v_{A_3} = v_{A_4} = \omega_3 R_3 = 80\text{см/с}$$

$$\omega_4 = \frac{v_{A_4}}{R_4} = 16\text{ рад/с}$$

$$\varepsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = 4\text{рад/с}^2, \quad \varepsilon_1 = |\varepsilon_{1z}| = 4\text{рад/с}^2,$$

$$a^{\tau}_{B_1} = \varepsilon_1 l \sin\alpha = 40\text{см/с}^2, \quad a^{\tau}_{B_1} = a^{\tau}_{B_2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{B_2}}{R_2} = 8\text{ рад/с}^2, \quad a^{\tau}_{A_3} = a^{\tau}_{A_4} = \varepsilon_3 R_3 = 80\text{см/с}^2$$

$$a^{n}_{A_3} = \omega_3^2 R_3 = 640\text{см/с}^2, \quad a^{n}_{A_4} = \omega_4^2 R_4 = 1280\text{см/с}^2,$$

$$a_{A_3} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_3} + a^{n2}_{A_3}} \approx 644{,}98\text{ см/с}^2, \quad a_{A_4} = \sqrt{a^{\tau 2}_{A_4} + a^{n2}_{A_4}} \approx 1282{,}49\text{ см/с}^2$$