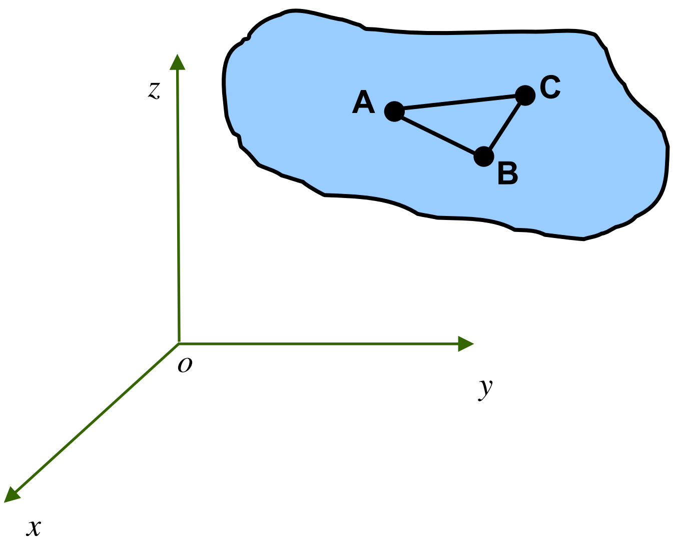
Кинематика твердого тела

Абсолютно твёрдым телом в теоретической механике называется тело, у которого расстояния между двумя любыми точками во всё время исследования (движения) остаются постоянными.

Число степеней свободы твердого тела – минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве.



Положение твердого тела в пространстве определяется положением трех его точек не лежащих на одной прямой.

$$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_c, y_c, z_c)$$

Координаты этих точек связаны уравнениями:

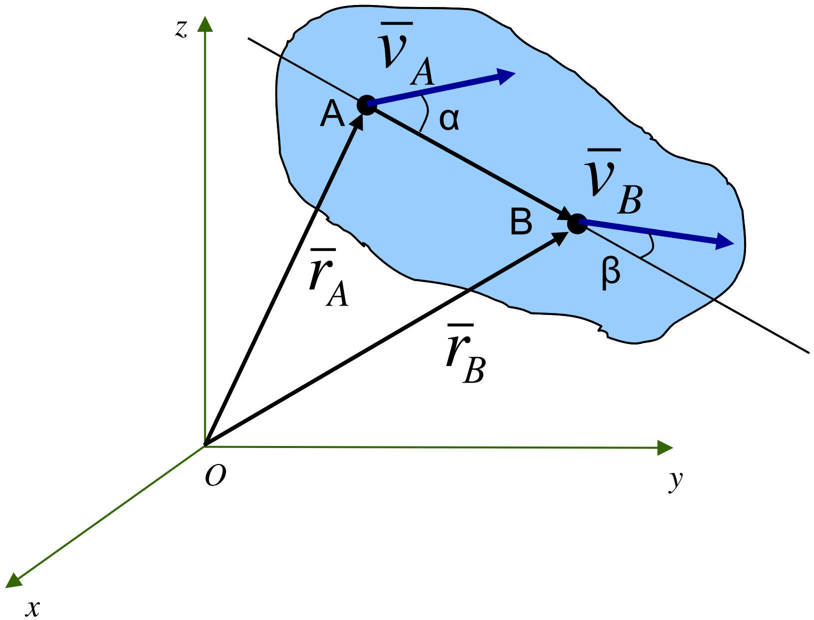
$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = L_{AB}^2$$
$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = L_{AC}^2$$
$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = L_{BC}^2$$

L_{AB}, L_{AC}, L_{BC} - расстояния между соответствующими точками в теле.

Таким образом, число степеней свободы свободного твердого тела в пространстве равно шести.

Основная теорема кинематики твердого тела

Проекции скоростей точек тела на прямую, их соединяющую, равны.



$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$$

Возводя в квадрат правую и левую части, получим:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = \bar{l}^{\,2}$$

$$l = \left|\overline{AB}\right| = const$$

Дифференцируя по времени это соотношение

$$2(\bar{r}_B - \bar{r}_A)\left(\frac{d\bar{r}_B}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt}\right) = 0$$

Поскольку в этом равенстве $(\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \bar{l},\ \dfrac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B,\ \dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$ то

$2\bar{l}(\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0$ или $\bar{l}\,\bar{v}_B = \bar{l}\,\bar{v}_A$ раскрывая скалярное произведение получим:

$$\boxed{v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha}$$

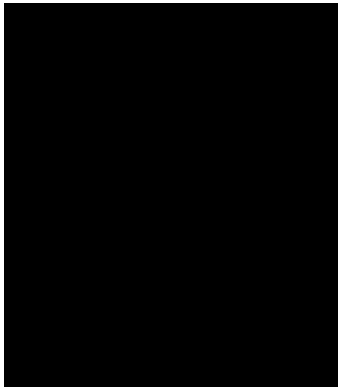
Простейшие движения твердого тела

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки в этом теле, будет оставаться параллельной своему первоначальному положению на протяжении всего времени движения.

спарник

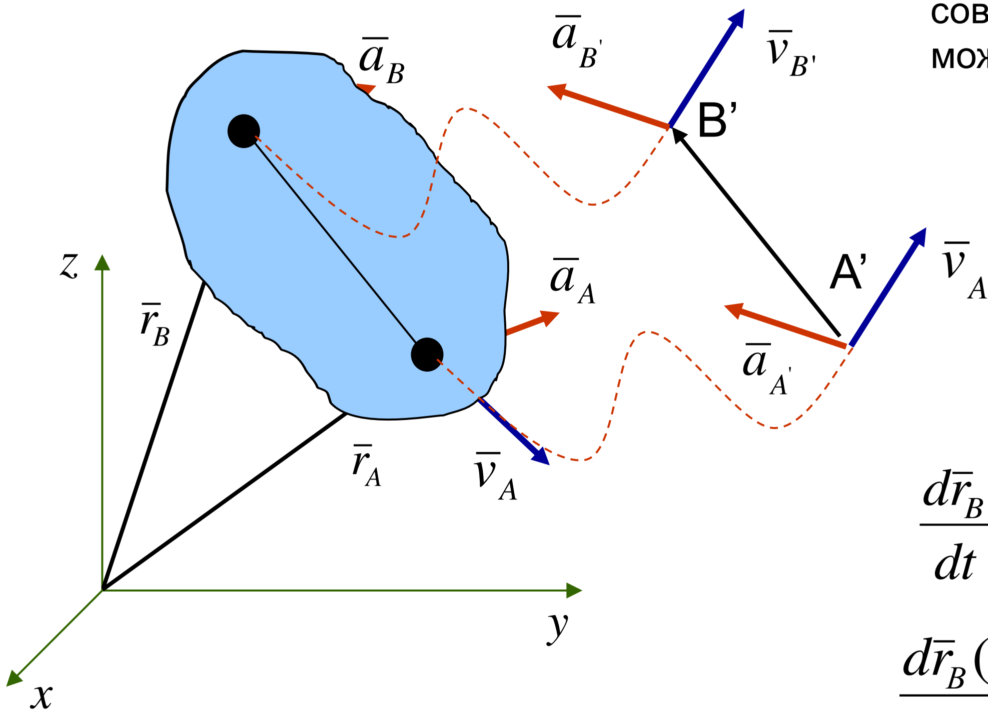
насос



планетарный механизм

Свойства поступательного движения:

1) траектории всех точек тела, совершающего поступательное движение конгруэнтны, т.е. одинаковы и могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом;
2) скорости всех точек тела одинаковы;
3) Ускорения всех точек тела одинаковы.



Для любых двух точек А и В тела, совершающего поступательное движение, можно записать соотношение:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = \overline{const},$$

Дифференцируя по времени правую и левую части соотношения для радиус-векторов получим:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}, \qquad \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt}$$

в каждый момент времени **скорость точки *B* геометрически равна скорости точки *A*:** $\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A}$

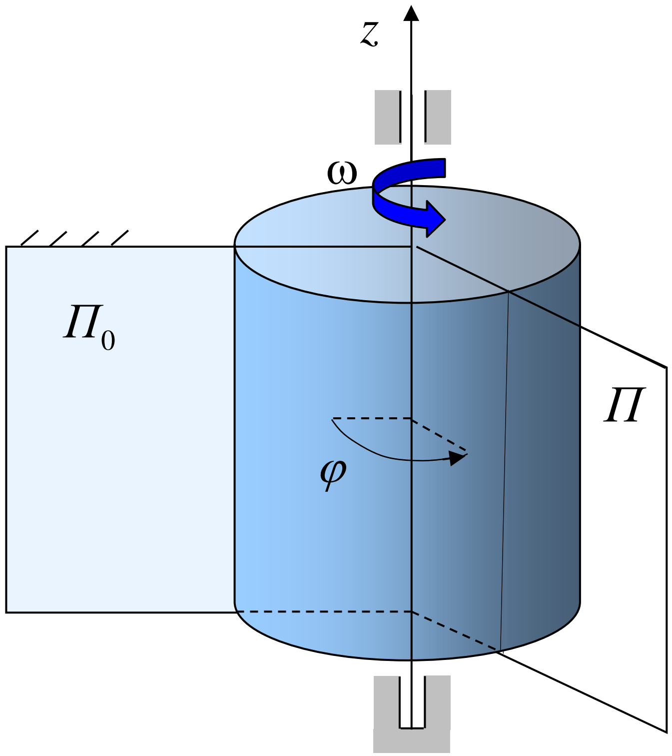
Дифференцируя левую и правую части соотношения для скоростей, получим:

$$\frac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2} \qquad \boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A}$$

Чтобы задать движение и определить кинематические характеристики тела, совершающего поступательное движение, достаточно задать движение одной его любой точки и найти ее кинематические характеристики. Таким образом:

свободное твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси или вращательным движением называется такое движение, при котором в теле можно выделить прямую, все точки которой будут оставаться неподвижными во время движения. Эта прямая называется **осью вращения** твердого тела.

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость Π_0 и подвижную П, скрепленную с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени *t* положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двугранным углом между плоскостями. Этот угол называется углом поворота тела.

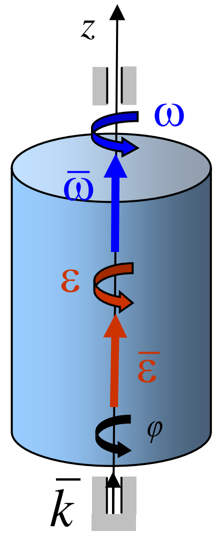
Таким образом, **при вращательном движении тело имеет одну степень свободы.**

$$\varphi = \varphi(t)$$

закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

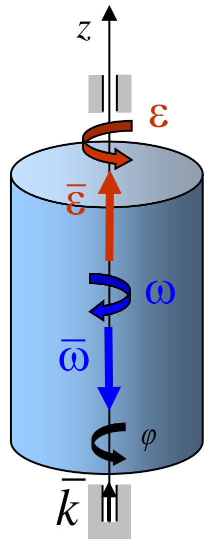
$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\varphi(t+\Delta t)}{\Delta t} = \omega_{ср}$ - средняя угловая скорость, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ - алгебраическая угловая скорость

Угловая скорость на чертеже изображается дуговой стрелкой, направленной в сторону вращения.



$\dot{\varphi} > 0$

$\ddot{\varphi} > 0$



$\dot{\varphi} < 0$

$\ddot{\varphi} > 0$

Вектор угловой скорости $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}$, $\omega_z = \bar{\omega}\bar{k} = \dot{\varphi}$

$\omega = |\bar{\omega}| = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$

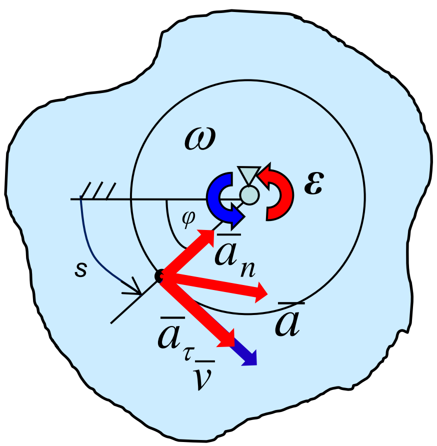
Алгебраическое угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi}\bar{k}$, $\varepsilon_z = \bar{\varepsilon}\bar{k} = \ddot{\varphi}$

$\varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|$

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ - **это скользящие вектора**

$\bar{\omega} \uparrow\uparrow \bar{\varepsilon}$ ускоренное вращение
$\bar{\omega} \uparrow\downarrow \bar{\varepsilon}$ замедленное вращение



Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении

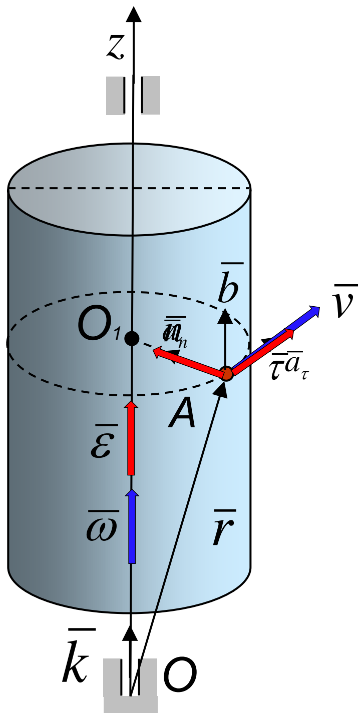
$$s(t) = h\varphi(t) \quad v_\tau = \dot{s} = h\dot{\varphi} \quad v = h\omega$$

Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

$$a_\tau = \ddot{s} = h\ddot{\varphi}; \;\; a_n = v^2/\rho = h^2\omega^2/h = h\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении

$$\bar{r} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}, \qquad \overline{OO_1} = OO_1\bar{k}, \qquad \overline{O_1A} = -h\bar{n}, \qquad \overline{OO_1} = \overline{const}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -h\frac{d\bar{n}}{dt}, \qquad \frac{d\bar{n}}{dt} = -\dot{\varphi}\bar{\tau} \Rightarrow \bar{v} = h\dot{\varphi}\bar{\tau}$$

Поскольку $\bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{b} = \bar{n} \times \bar{k}$, то:

$$\bar{v} = h\dot{\varphi}\bar{n} \times \bar{k} = \dot{\varphi}\bar{k} \times (-h\bar{n}) = \dot{\varphi}\bar{k} \times (OO_1\bar{k} - h\bar{n})$$

Окончательно получаем:

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$$ - **формула Эйлера**

Дифференцируя формулу Эйлера по времени, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

$$\boxed{\overline{a_\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\,; \;\; \overline{a_n} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}$$