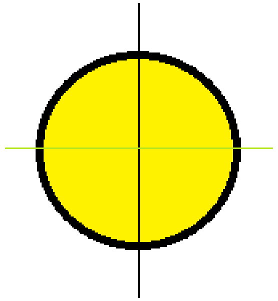
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Лекция 3



«Закон сохранения момента импульса»

Нажмите мышку или пробел

Содержание лекции:

МГТУ им. Н.Э. Баумана

1. Момент силы.

2. Моменты импульса материальной точки и механической системы.

3. Уравнение моментов механической системы.

4. Закон сохранения момента импульса механической системы.

Литература

ОЛ-2 §3.12, 5.1-5.4. ОЛ-5 §5.1-5.4. ДЛ-12 §21, 24, 31, 32. ДЛ-14 §30, 32, 33-36.

Нажмите мышку или пробел

Момент силы

1. Момент силы относительно точки.

О. Моментом силы относительно точки называется векторная физическая величина, которая определяется векторным произведением радиуса вектора $\vec{R}$ и силы $\vec{F}$ (рис. 1) :

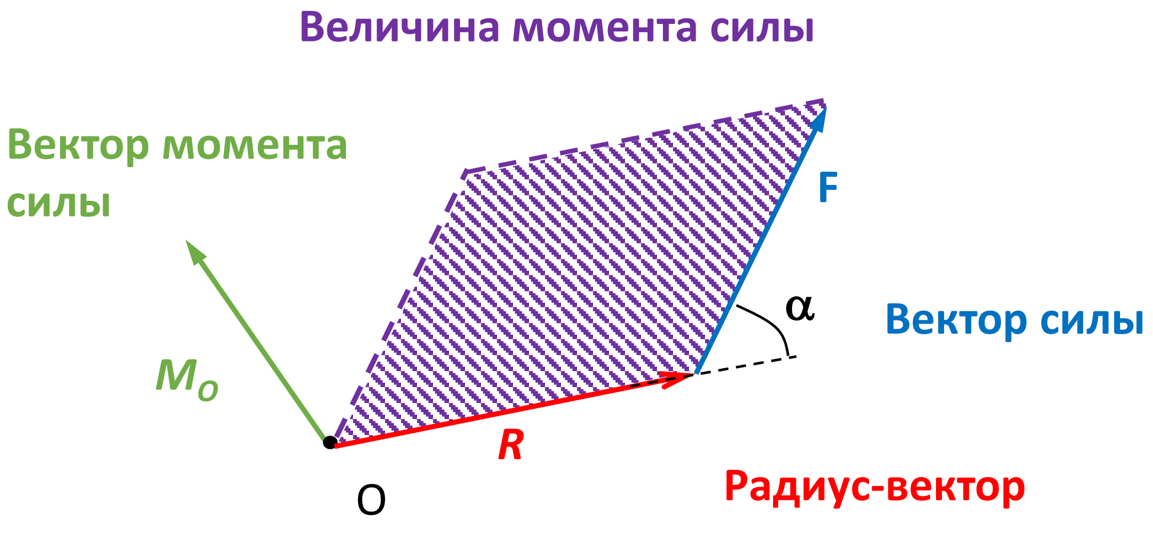


Рис. 1.

$$\vec{M}_O = [\vec{R}, \vec{F}] = \vec{R} \times \vec{F} \qquad (1)$$

Величина момента силы:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{R}||\vec{F}| \sin\alpha \qquad (2)$$

Размерность момента силы:

$[M_O] =$ Н·м

Нажмите мышку или пробел

Свойства вектора момента силы

МГТУ им. Н.Э. Баумана

1) $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{R}$ и $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\perp\vec{F}$ (3)

2) В декартовых координатах:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{e}_x\left(yF_z-zF_y\right)+\vec{e}_y\left(zF_x-xF_z\right)+\vec{e}_z\left(xF_y-yF_x\right) \quad (4)$$

3) Момент суммы сил равен векторной сумме моментов каждой из сил:

$$\vec{M}_O\left(\sum_i\vec{F}_i\right)=\sum_i\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

То есть:

$$\overrightarrow{M}_O = \left[\vec{R},\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\cdots\right)\right] = \left[\vec{R},\overrightarrow{F_1}\right]+\left[\vec{R},\overrightarrow{F_2}\right]+\cdots = \left[\vec{R},\textstyle\sum_i\vec{F}_i\right] = \textstyle\sum_i\overrightarrow{M}_O\left(\vec{F}_i\right). \quad (5)$$

Нажмите мышку или пробел

4) При переносе силы вдоль линии ее действия момент силы не изменяется. Линия действия силы – прямая линия, на которой лежит вектор силы. Рис. 2

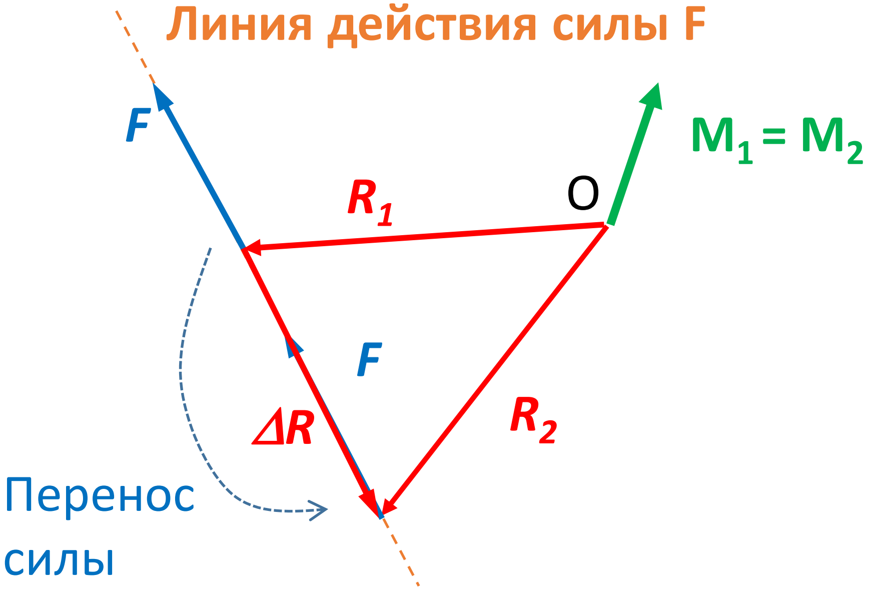


Рис. 2.

$$\vec{M}_1 = [\vec{R}_1, \vec{F}]$$

$$\vec{M}_2 = [\vec{R}_2, \vec{F}]$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \overrightarrow{\Delta R}$$

Так как $\overrightarrow{\Delta R} || \vec{F}$, то $[\overrightarrow{\Delta R}, \vec{F}] = \vec{0}$,

следовательно, $\vec{M}_1 = [\vec{R}_1, \vec{F}] = [\vec{R}_2, \vec{F}] = \vec{M}_2$. (6)

Вывод: если две *одинаковые* силы лежат *на одной прямой – линии действия этих сил*, то их моменты будут *одинаковыми*.

Нажмите мышку или пробел

5) Момент пары внутренних сил,

лежащих на одной прямой линии (рис. 3).

МГТУ им. Н.Э. Баумана

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{R}_1, \vec{F}_1] + [\vec{R}_2, \vec{F}_2]$$

Учитывая, что

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1\,, \qquad \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{\Delta R}\,,$$

$$\overrightarrow{\Delta R} \,||\, \overrightarrow{F_2} \Rightarrow [\overrightarrow{\Delta R}, \vec{F}_2] = \vec{0} \Longrightarrow [\vec{R}_2, \vec{F}_2] = [\vec{R}_1, \vec{F}_2]$$

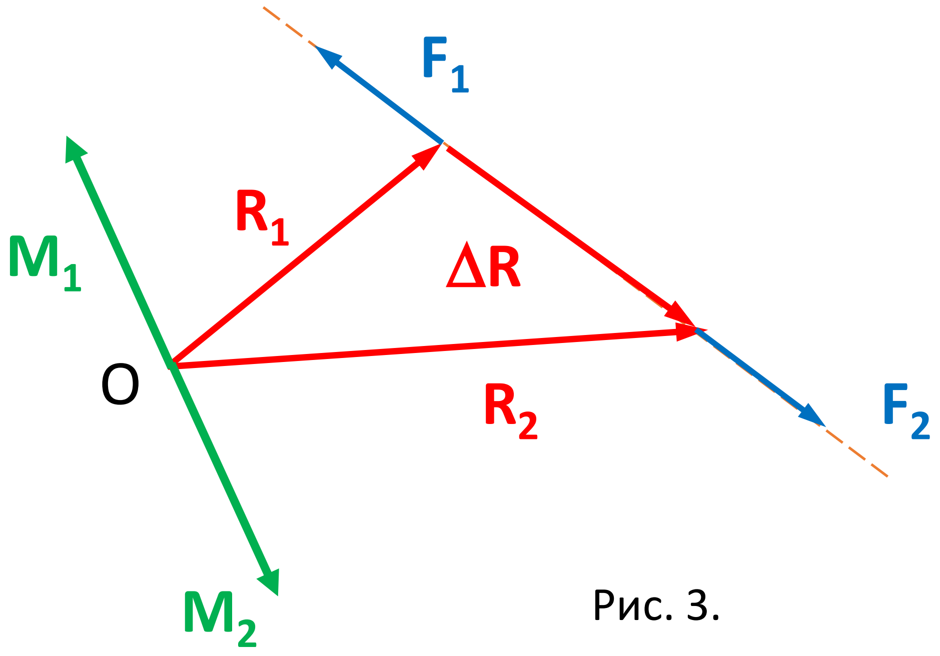


Рис. 3.

Получаем момент пары внутренних сил

$$\vec{\mathrm{M}} = [\vec{R}_1, \vec{F}_1] + [\vec{R}_1, \vec{F}_2] = [\vec{R}_1, \vec{F}_1 + \vec{F}_2] = \vec{0} \qquad (7)$$

Нажмите мышку или пробел

Момент силы относительно оси.

Координаты вектора моменты силы относительно координатных осей определяются формулами:

$$M_{Ox}\left(\vec{F}\right) = yF_z - zF_y \ , \quad M_{Oz}\left(\vec{F}\right) = xF_y - yF_x \ , \quad M_{Oy}\left(\vec{F}\right) = zF_x - xF_z \qquad (8)$$

1) Проекция вектора момента силы на ось z не зависит от выбора точки O (рис.4).

Разность векторов: $\vec{M}_2 - \vec{M}_1 = \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right) \times \vec{F}$

Разность проекций векторов:

$$M_{1z} - M_{2z} = \left(\vec{M}_1, \vec{k}\right) - \left(\vec{M}_2, \vec{k}\right) = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2, \vec{k}\right)$$

Так как в смешанном произведении векторы $\overrightarrow{\Delta R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ и орт $\vec{k}$ лежат на одной прямой, то

$$\left(\vec{M}_2 - \vec{M}_1, \vec{k}\right) = \left(\left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right) \times \vec{F}, \vec{k}\right) = 0$$

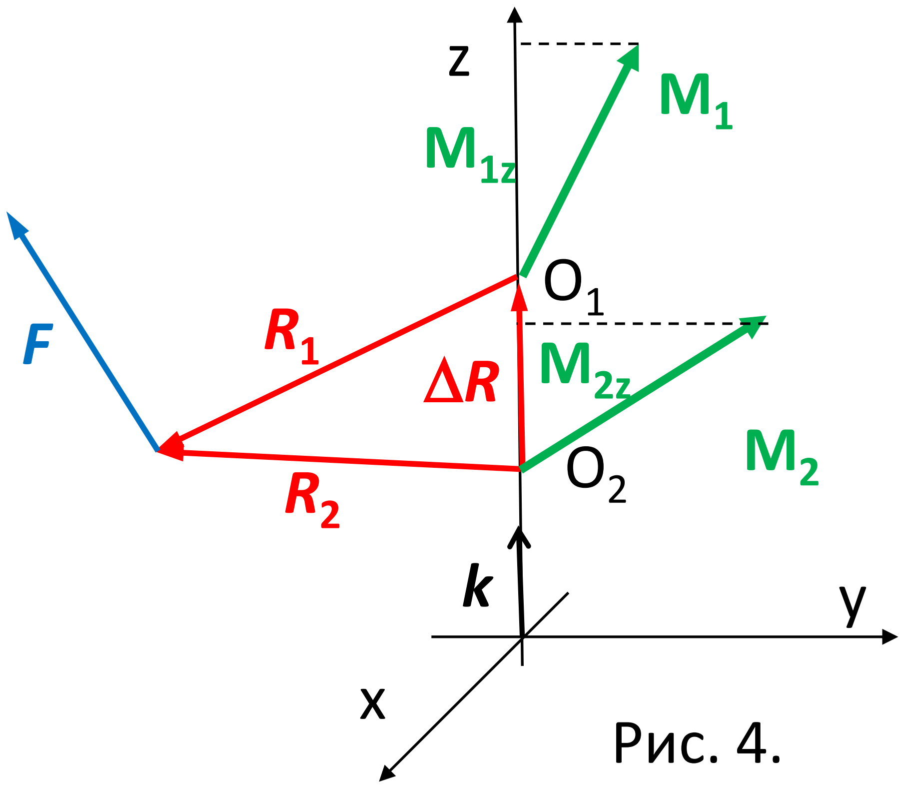


Рис. 4.

Следствие. *Если момент силы относительно некоторой точки на оси равен нулю, то равен нулю момент силы относительно этой оси.*

Нажмите мышку или пробел

2) Если вектор силы ***F*** параллелен оси Z, то момент силы относительно оси равен нулю.

Действительно, в этом случае $\vec{F}||\vec{k}, \vec{M} \perp \vec{k} \Rightarrow Mz = (\vec{M}, \vec{k}) = 0$

МГТУ им. Н.Э.
Баумана

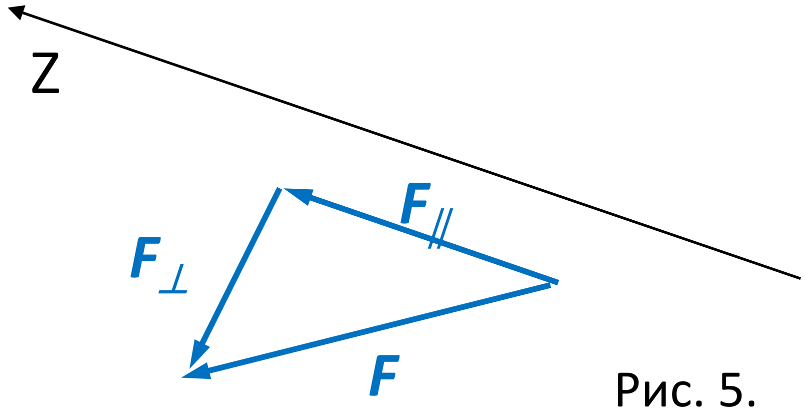


Рис. 5.

Следовательно, если $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$, то есть вектор силы можно разложить на компоненту $\vec{F}_{\parallel}$ параллельную оси, и компоненту $\vec{F}_{\perp}$, перпендикулярную оси, то (рис.5)

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{\parallel}) + M_z(\vec{F}_{\perp}) = M_z(\vec{F}_{\perp}).$$

3) Если вектор силы и ось не параллельны, но лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси равен нулю.

Действительно, т.к. ось Z и векторы $\vec{R}$ и $\vec{F}$ лежат в одной плоскости, а момент силы относительно любой точки на оси $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{R}$ и $\vec{M}_O(\vec{F}) \perp \vec{F}$, то M_z=0

Итак, если вектор силы и ось лежат в одной плоскости, а линия действия силы пересекается с осью, то момент силы относительно точки и оси равны нулю

Нажмите мышку или пробел

Правила нахождения момента силы F относительно оси Z

МГТУ им. Н.Э.
Баумана

1.Найти проекцию силы $\overrightarrow{F_\perp}$ на любую плоскость π перпендикулярную оси Z и указать точку О – точку пересечения этой плоскости с осью Z.

2. Найти плечо силы $\overrightarrow{F_\perp}$ относительно оси – т.е. расстояние *L* от линии действия силы $F_\perp$ проекции силы (в плоскости π) до точки О (длину отрезка ОА на рисунке);

3. Найти величину момента силы $|M_Z| = F_\perp |OA|$ и направление $\overrightarrow{M_Z}$ по правилу правого винта (буравчика).

4. Найти проекцию момента силы на выбранное направление – направление оси Z.

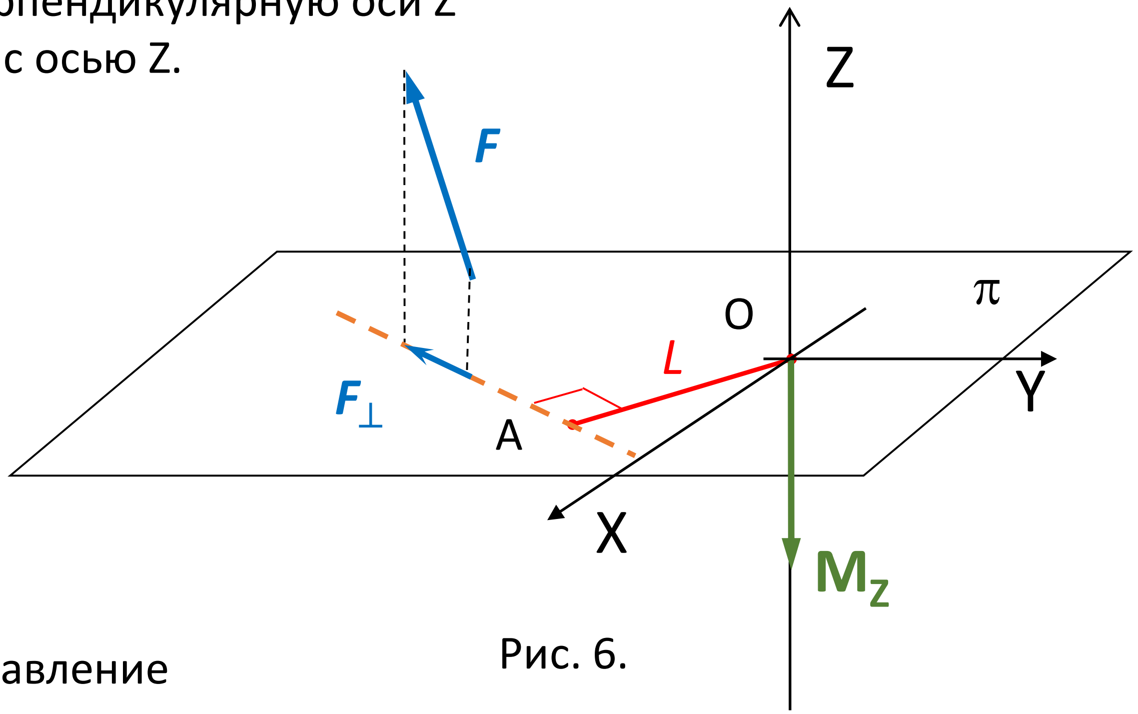


Рис. 6.

Нажмите мышку или пробел

Момент импульса материальной точки

1. Момент импульса материальной точки относительно точки

МГТУ им. Н.Э. Баумана

О. ***Кинетическим моментом импульса материальной точки*** массой *m*, движущейся со скоростью ***υ***, называется векторное произведение радиуса вектора $\vec{R}$, исходящего из точки *O* к импульсу движущейся точки, и вектора импульса материальной точки $\vec{p} = m\vec{v}$ (рис. 7):

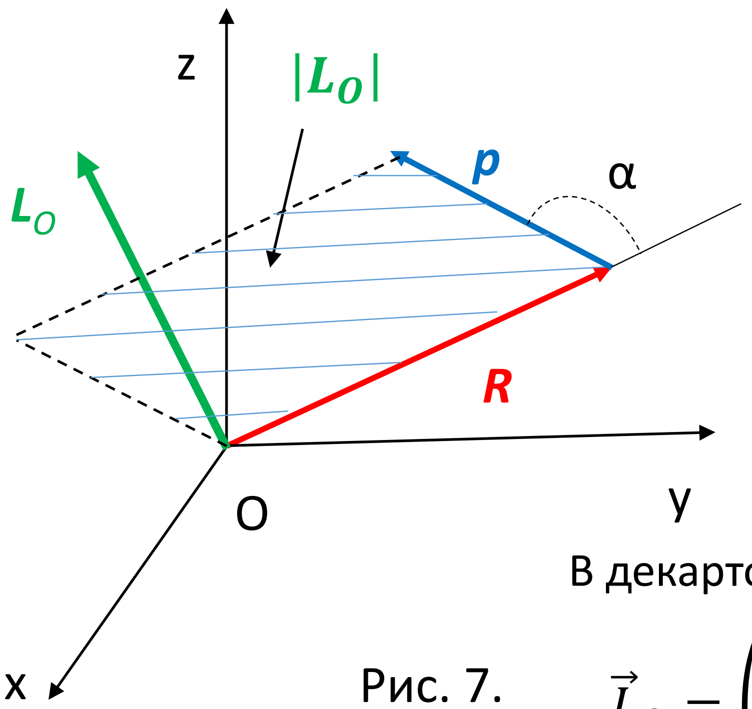


Рис. 7.

$$\vec{L}_O = [\vec{R}, m\vec{v}] = [\vec{R}, \vec{p}] \qquad (9)$$

Точку О иногда называют ***полюсом***.

Размерность момента импульса - $L_O = \left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}\right]$.

Вектор момента импульса всегда перпендикулярен радиусу вектору $\vec{R}$ и вектору импульсу материальной точки

$$\vec{L}_O \perp \vec{R}, \vec{L}_O \perp \vec{p}. \qquad (10)$$

В декартовых координатах момент импульса материальной точки:

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x) \qquad (11)$$

Нажмите мышку или пробел

2. Момент импульса механической системы относительно точки

Момент импульса механической системы (системы материальных точек, тела) относительно некоторой точки O:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{p}_i \qquad (12)$$

При переходе к другой точке O_1 радиус-векторы точек системы преобразуются $\vec{R}_i = \vec{R}_{1i} + \vec{R}_1$

Поэтому $$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} + \vec{R}_1\right) \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \vec{p}_i\right) = \sum_i \vec{R}_{1i} \times \vec{p}_i + \vec{R}_1 \times \left(\sum_i \vec{p}_i\right) \qquad (13)$$

Суммарный импульс системы равен импульсу центра масс: $$\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_C$$

Момент импульса механической системы: $$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{R}_1 \times \vec{p}_C \qquad (14)$$

В системе отсчета, где центр масс тела покоится: $$\vec{p}_C = \vec{0} \qquad (15)$$

Суммарный момент импульса *не зависит* от точки, относительно которой он вычисляется:

$$\vec{L} = \vec{L}_1$$

Уравнение динамики вращательного движения материальной точки

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Момент импульса материальной точки: $\vec{L}_O = [\vec{R}, m\vec{v}] = [\vec{R}, \vec{p}]$ (16)

Найдем производную от вектора момента импульса по времени: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} + \vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ (17)

Так как $\frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = \vec{0}$

в инерциальной системе отсчета по второму закону Ньютона (в импульсной форме): $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

То второе слагаемое имеет вид $\vec{R} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}$ - вектор момента равнодействующей силы

Уравнение динамики вращательного движения материальной точки в векторном виде (относительно произвольной точки)*:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (18)$$

О. Производная от вектора момента импульса относительно точки равна моменту действующих сил относительно этой точки.

Нажмите мышку или пробел

Уравнение динамики вращательного движения механической системы в векторном виде.

Суммарный момент импульса механической системы в векторной форме:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{p}_i \qquad (19)$$

Производная от вектора суммарного момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i \qquad (20)$$

На частицы действуют внешние и внутренние силы:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{F}_i^{ВНЕШ}$$

При этом внутренние силы подчинятся третьему закону Ньютона – они лежат на прямых линиях, попарно соединяющих точки, противоположны по направлению и одинаковы по величине:

$$\vec{F}_i^{ВНУТР} = -\vec{F}_j^{ВНУТР} \quad \text{и} \quad \left|\vec{F}_i^{\text{ВНУТР}}\right| = \left|\vec{F}_j^{\text{ВНУТР}}\right|$$

и, поэтому момент внутренних сил равен нулю:

$$\sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{ВНУТР} = \sum_i \left(\vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{R}_{\perp ij} \times \vec{F}_j^{ВНУТР}\right) = \sum_i \vec{R}_{\perp ij} \times \left(\vec{F}_i^{ВНУТР} + \vec{F}_j^{ВНУТР}\right) = \vec{0} \qquad (21)$$

Изменение вектора момента импульса механической системы во времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i^{\,ВНЕШ} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right) \qquad (22)$$

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Уравнение динамики вращательного движения (УДВД) механической системы (системы материальных точек):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right) \qquad (23)$$

Суть уравнения ДВД: ***Производная от вектора суммарного момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.***

УДВД в проекциях на оси:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{Ox}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{Oy}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{Oz}\left(\vec{F}_i^{\,ВНЕШ}\right) \qquad (24)$$

Нажмите мышку или пробел

Момент импульса твердого тела.

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω (рис.8) .

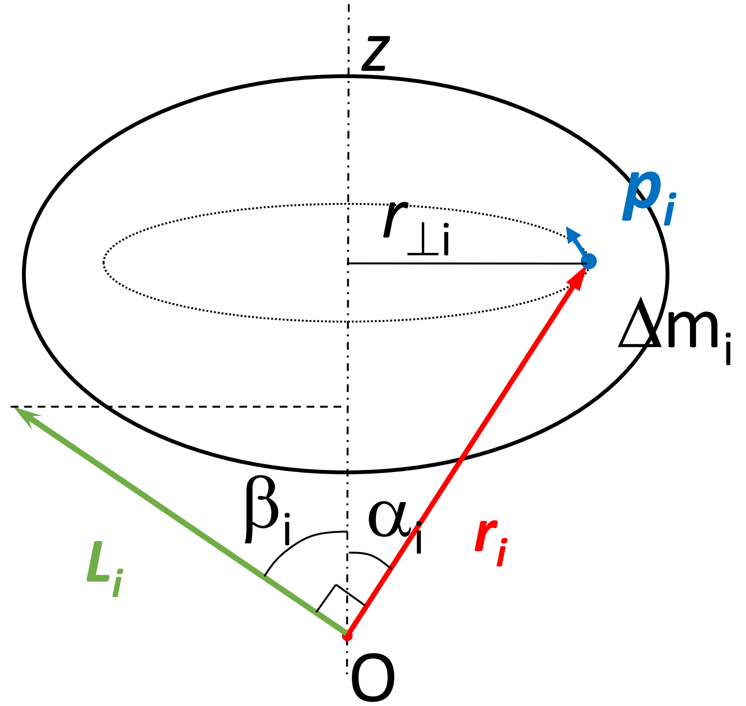


Рис. 8.

Момент импульса малой частицы массой Δm_i, находящейся на расстоянии $\vec{r}_i$ и имеющей импульс $\vec{p}_i$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (25)$$

Учитывая, что $\cos\beta_i = \sin\alpha_i$

Получаем проекцию момента импульса М.Т.:

$$L_{iz} = r_i p_i \cos\beta_i = r_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp} \omega \sin\alpha_i \qquad (26)$$

Так как $r_{i\perp} = r_i \sin\alpha_i$

Проекция момента импульса М.Т.: $L_{iz} = \Delta m_i \cdot r_{i\perp}{}^2 \omega$ (27)

Для всего тела в проекции на ось Z:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}{}^2 \omega = \omega \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}{}^2 \qquad (28)$$

Нажмите мышку или пробел

В выражении (28) выделим величину:

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^{\ 2}$$

- *момент инерции* механической системы относительно оси z (единица измерения кг·м^2). (29)

Для сплошных тел суммирование можно заменить интегралом по массе тела:

$$I_z = \iiint_m r_\perp^{\ 2} dm \qquad (30)$$

Момент импульса твердого тела при вращательном движении вокруг оси *z* относительно оси:

$$L_z = I_z \omega \qquad (31)$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Продифференцируем по времени проекцию на ось z момента импульса твердого тела, выражение (31):

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z\omega\right) \qquad (32)$$

Учтем, что момент инерции твердого тела относительно оси не зависит от времени:

$$I_z = const \qquad (33)$$

и $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ - угловое ускорение твердого тела (34)

Получаем выражение: $$I_z\varepsilon = M_z^{ВНЕШ} \qquad (35)$$

Выражение (35) является <u>уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси</u>:

угловое ускорение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси прямо пропорционально величине момента внешних сил относительно этой оси.

Нажмите мышку или пробел

Закон сохранения момента импульса.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

В случае замкнутой механической системы:

$$\sum_i \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{\text{ВНЕШ}}\right) = \vec{0} \qquad (36)$$

И, следовательно, из уравнения динамики вращательного движения механической системы имеем:

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_i \vec{L}_i = \text{const}} \qquad (37)$$

О. - ЗСМИ: ***«Если момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно некоторой точки равен нулю, то сохраняется момент импульса системы относительно этой точки. Иными словами, в замкнутых, изолированных механических системах вектор момента импульса сохраняется, то есть не меняется с течением времени».***

Нажмите мышку или пробел

Для проекций момента импульса механической системы:

$$\sum_i L_{ix} = \mathrm{const}; \quad \sum_i L_{iy} = \mathrm{const}\,; \quad \sum_i L_{iz} = \mathrm{const} \qquad (38)$$

Если система частично замкнута:

$$\begin{cases} \sum_i \frac{d\vec{L}_{ix}}{dt} = \vec{0}; \\ \sum_i \frac{d\vec{L}_{iy}}{dt} \neq \vec{0}; \\ \sum_i \frac{d\vec{L}_{iz}}{dt} \neq \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \sum_i L_{ix} = const; \\ \sum_i L_{iy} \neq const; \\ \sum_i L_{iz} \neq const \end{array} \qquad (39)$$

***Условия равновесия тела можно сформулировать таким образом, как следствия из ЗСИ и ЗСМИ*:**

1.Если тело покоится, то центр масс тела не движется, поэтому для центра масс

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{\,ВНЕШ}}{m_c} = \vec{0}$$

То есть:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,ВНЕШ} = \vec{0}$$

2. Если тело не вращается, то

$$\varepsilon = \frac{M_z^{ВНЕШ}}{I_z} = 0$$

То есть:

$$M_z^{ВНЕШ} = 0$$

Нажмите мышку или пробел

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Т. Гюйгенса-Штейнера устанавливает связь между моментами инерции твердого тела относительно двух *параллельных* осей, причем если одна из осей проходит через центр масс твердого тела.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

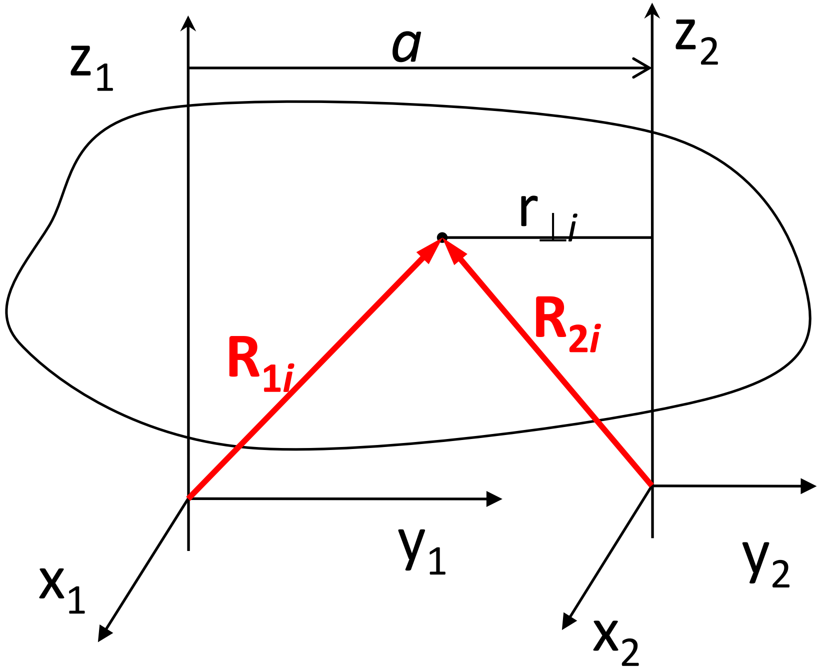


Рис. 9.

Рассмотрим две параллельные оси z_1 и z_2 (рис. 9).

Радиус-вектор между осями z_1 и z_2 : $\vec{a} = \left(a_x, a_y, 0\right)$

Расстояние между осями будет равно: $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (40)$$

Координаты любой *i*-й малой частицы тела:

$$x_{2i} = x_{1i} + a_x \;, \quad y_{2i} = y_{1i} + a_y \;, \quad z_{2i} = z_{1i}$$

Квадрат расстояния от этой точки до первой оси z_1:

$$r_{1\perp i}^{\;2} = x_{1i}^2 + y_{1i}^2 \qquad (41)$$

до второй оси z_2 : $$r_{2\perp i}^{\;2} = x_{2i}^2 + y_{2i}^2 \qquad (42)$$

Нажмите мышку или пробел

Ось z_1 проходит через центр масс тела.

Момент инерции относительно второй оси:

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{2i\perp}{}^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{2i}^2 + y_{2i}^2\right) \quad (43)$$

Учитывая (40), получаем:

$$I_{z2} = \sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right) + \sum_i \Delta m_i \cdot \left(a_x^2 + a_y^2\right) + 2\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}a_x + y_{1i}a_y\right) \quad (44)$$

В выражении (44):

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right) = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{1i\perp}^2 = I_{z1} \quad (45)$$

\- момент инерции тела относительно оси z_1,

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(a_x^2 + a_y^2\right) = a^2 \sum_i \Delta m_i = ma^2 \quad (46)$$

$$\sum_i \Delta m_i \cdot \left(x_{1i}a_x + y_{1i}a_y\right) = \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i}a_x + \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i}a_y = $$
$$= a_x \sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} + a_y \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i} \quad (47)$$

Учтём, что

$$\sum_i \Delta m_i \cdot x_{1i} = mx_{1C} \quad \text{и} \quad \sum_i \Delta m_i \cdot y_{1i} = my_{1C} \quad (48)$$

Нажмите мышку или пробел

В выражении (48) x_{1C} и y_{1C} – координаты центра масс тела в системе координат $(x_1 y_1 z_1)$

Тогда из (43) имеем выражение для момента инерции относительно оси z_2 :

$$I_{z2} = I_{z1} + ma^2 + 2m\left(a_x x_{1C} + a_y y_{1C}\right) \tag{49}$$

Если предположить, что ось z_1 проходит через центр масс тела, то x_{1C} =0 и y_{1C} =0, поэтому в этом случае выражение (49) упрощается:

$$I_z = I_{zC} + ma^2 \tag{50}$$

Это выражение носит название теоремы Гюйгенса-Штейнера:
момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела и квадрата расстояния между осями, умноженного на массу тела.

Пример. Момент инерции стрежня относительно оси, проходящей через край стержня, перпендикулярно ему, равен сумме момента инерции относительно срединной оси и массе, умноженный на квадрат половины длины стержня (рис.10):

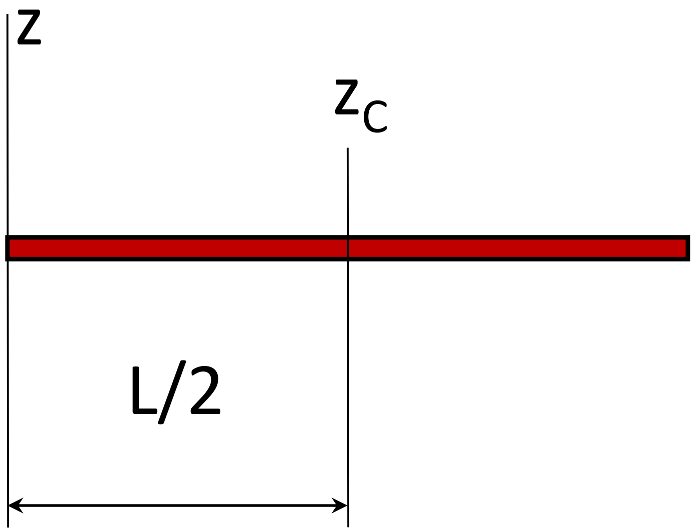


Рис. 10.

$$I_z = I_{zC} + m\frac{L^2}{4} = \frac{Lm^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3} \qquad (51)$$

Нажмите мышку или пробел

Примеры вычисления моментов инерции тел.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

1) Момент инерции тонкого кольца (прямого тонкостенного цилиндра) массы m и радиуса R относительно оси z, перпендикулярной плоскости кольца, проходящей через центр кольца (рис.11)

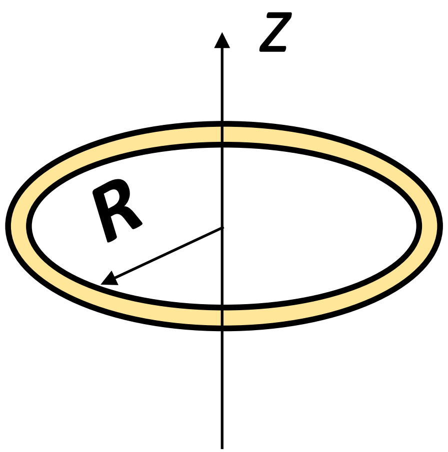


Рис. 11.

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \cdot r_{i\perp}{}^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2$$

Нажмите мышку или пробел

2) Момент инерции диска (сплошного цилиндра) массы m и радиуса R относительно оси z, перпендикулярной к плоскости диска, проходящей через центр диска (сплошного цилиндра).

МГТУ им. Н.Э. Баумана

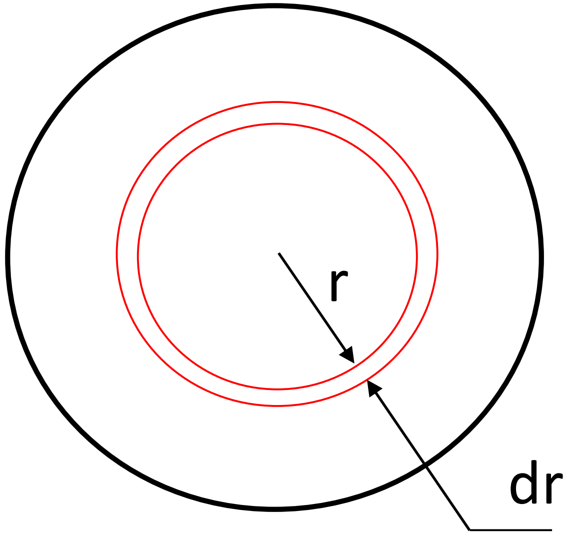


Рис. 12.

Выделим тонкий цилиндр радиусом *r* и толщиной *dr*.

Масса этого цилиндра $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{m}{R^2} 2r dr$

Поэтому момент инерции сплошного цилиндра (диска) относительно оси, проходящей через ось его симметрии:

$$I_z = \int_0^R r^2 \frac{m}{R^2} 2r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} \qquad (52)$$

Нажмите мышку или пробел

3) *Момент инерции тонкого стержня* относительно оси Z, являющейся срединным перпендикуляром. Масса стержня *m*, длина *L*. (рис. 13)

МГТУ им. Н.Э. Баумана

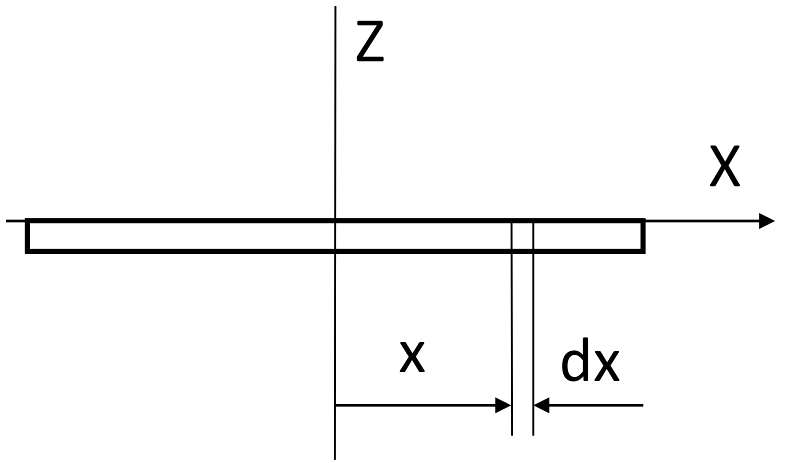


Рис. 13.

Выделим на расстоянии x от оси Z маленькую часть стержня длиной dx.

Масса этой части $dm = \frac{m}{L}dx$ и $r_{\perp} = x$

Поэтому момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его центр:

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{3L}\frac{2L^3}{8} = \frac{mL^2}{12} \qquad (53)$$

Нажмите мышку или пробел

4) ***Момент инерции тонкостенного шара*** относительно любой оси симметрии Z. Масса шара *m*, радиус *R*. (рис.14)

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Выделим на поверхности сферы кольцевой сегмент, для которого ось Z является осью симметрии. Сегмент опирается на малый центральный угол dφ, положение сегмента определяется углом φ, отсчитываемым от плоскости экватора, перпендикулярной оси Z.

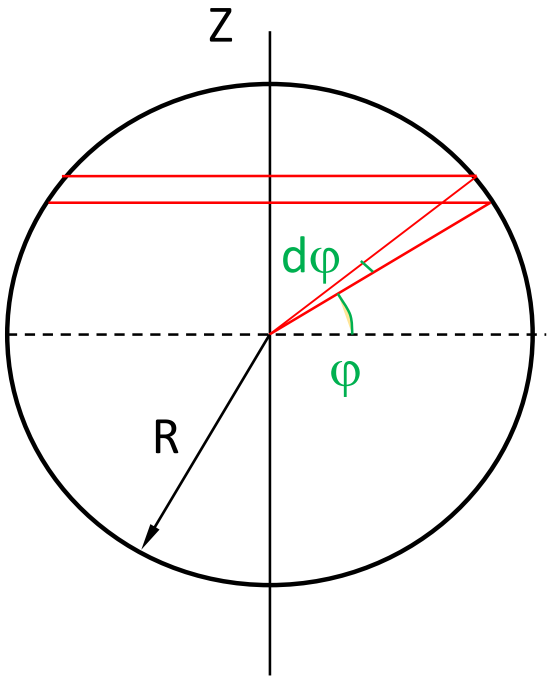


Рис. 14.

Радиус кольца: $r_\perp = R\cos\varphi$

Масса кольца: $$dm = \frac{m}{4\pi R^2} 2\pi R\cos\varphi \cdot Rd\varphi$$

$$I_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\cos\varphi)^2 \frac{m}{4\pi R^2} 2\pi R\cos\varphi \cdot Rd\varphi$$

или $$I_z = \frac{m}{2}R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi)^2 \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{m}{2}R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi)$$

$$I_z = \frac{2}{3}mR^2$$ - *Момент инерции тонкостенного шара* относительно любой оси симметрии Z.

Нажмите мышку или пробел

5) Момент инерции сплошного шара относительно любой оси симметрии Z. Масса шара m, радиус шара R. (рис.15)

МГТУ им. Н.Э. Баумана

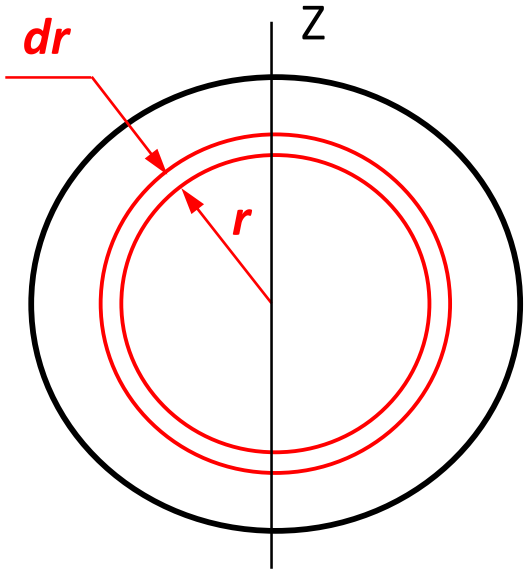


Рис. 15.

Представим шар как набор вложенных друг в друга тонкостенных сфер переменного радиуса *r* и толщиной *dr*. Масса одной такой сферы:

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{3m}{R^3} r^2 \cdot dr$$

Момент инерции такой сферы

$$dI_z = \frac{2}{3} dm \cdot r^2 = \frac{2}{3}\frac{3m}{R^3} r^2 \cdot dr \cdot r^2 = \frac{2m}{R^3} r^4 \cdot dr$$

Момент инерции однородного шара относительно оси симметрии:

$$I_z = \int_0^R \frac{2m}{R^3} r^4 dr = \frac{2m}{R^3}\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} mR^2$$

Нажмите мышку или пробел

Вопросы для самопроверки по теме «Закон сохранения момента импульса»:

1. Дайте определение момента силы относительно неподвижной точки.

2. Единицы измерения в системе СИ.

3. Дайте определение момента силы относительно неподвижной оси.

4. Дайте определение момента импульса относительно точки. Единицы измерения в системе СИ.

5. Дайте определение момента импульса относительно оси.

6. Сформулируйте закон изменения момента импульса механической системы частиц относительно неподвижной оси.

7. Какие силы, действующие на частицы материальной системы называются внутренними?

8. Какие силы, действующие на частицы материальной системы называются внешними?

9. Сформулируйте закон сохранения момента импульса механической системы?

10. Что называется моментом инерции твёрдого тела относительно оси?

11. Сформулируйте теорему Штейнера.

12. Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение относительно неподвижной оси.

13. Кинетическая энергия при поступательно-вращательном (плоском движении).

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика.- М. : Наука. Физматлит, 2004, 1998.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Молекулярная физика и термодинамика. - М. : Наука. Физматлит, 2004, 1998.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. Волны. Оптика - М. : Наука. Физматлит, 2004, 1998.
4. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. - М.-С.-П.:Физматлит, 2006, 2000
5. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. - М.-С.-П.:Физматлит, 2006, 1999.
6. Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы. . М.-С.-П.:Физматлит, 2006, 2001.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.
8. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.
9. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике.- М.: Высшая школа, 2003, 1988.
10. Гладков Н.А., Романов А.С. Методические указания к домашнему заданию по курсу общей физики по теме «Законы сохранения. Колебания. Волны», 2012 г.

МГТУ им.
Н.Э. Баумана

Дополнительная литература (ДЛ)

11. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
12. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. - М.: Высшая школа, 1987.
13. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том I. Механика. -М.: Наука,1989.
14. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика. -М.: Наука,1990.
15. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Раздел «Механика» под редакцией Яковлева М.А. – М:Изд-во МГТУ, 2001,1983

Методические пособия, изданные в МГТУ (МП)

1. Еркович О.С., Морозов А.Н. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Статистическая физика.-М.: Изд-во МГТУ, 2007.-26с.
2. Еркович О.С., Морозов А.Н. Решение задач по курсу общей физики. Процессы переноса.- М. Изд-во МГТУ, 2009.-24с.
3. Голубев В.Г., Яковлев М.А. Олимпиадные задачи по физике. Разделы: Механика, термодинамика. .-М.:Изд-во МГТУ, 2006.-44с
4. Веретимус Д.К., Веретимус Н.К., Креопалов Д.В. Механические колебания.- .-М.:Изд-во МГТУ, 2008.-24с
5. Веретимус Д.К., Веретимус Н.К., Креопалов Д.В. Механические волны..-М.:Изд-во МГТУ, 2009.-29с

Нажмите мышку или пробел